МатАнал

Забродин Денис Александрович

20 ноября 2022 г.

Содержание

1 Последовательности

1.1 Основные понятия

Истинность прямой теоремы $A \Rightarrow B$ отнюдь не означает истинность обратной $B \Rightarrow A$.

Определение последовательности: Пусть задано некоторое множество X элементов произвольной природы.
Всякое отображение $f : \mathbb{N} \to X$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в заданное множество X называется последовательностью

Определение числовой последовательности: Пусть X - это это либо множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо множество комплексных чисел $\mathbb{C}$. Тогда последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ элементов множества X называется числовой последовательностью.

Определение: Окрестность точки a, лежащей на действительной оси, радиуса δ (U(α, δ)) называется множество точек числовой прямой, удаленных от α не более, чем на δ + сама точка α, т.е:
U(α, δ) = {α - δ < x < α + δ, $\quad \delta > 0$}

Определение: Предельная точка последовательности — это точка, в любой окрестности которой содержится бесконечно много элементов этой последовательности. Для сходящихся числовых последовательностей предельная точка совпадает с пределом.

Определение: Окрестность точки α радиуса δ с выколотым центром называется (проколотая окрестность) множество таких точек x, для которых выполняется следующее равенство: $U^{\circ}(\alpha, \delta) = \{0 < |x - \alpha| < \delta\}$

Определение: точка x_0 называется предельной точкой множество Q $\in \mathbb{R}$, если для $\forall U(x_0, \delta)$ $\exists$ хотя бы одна точка $x_1 \in Q$

1.2 Ограничения последовательности

- Ограничена сверху: $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$: $a_n \leq M \ \forall n$
- Ограничена снизу: $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}$: $a_n \geq m \ \forall n$
- Ограничена: $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}$: $m \leq a_n \leq M \ \forall n$

Возможно другое определение: Последовательность x_n называется ограниченной, если существует такое число M > 0, что для n $\in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leq M$
$\{x_n\}$ - ограничена $\Leftrightarrow \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ |x_n| \leq M$

Поскольку для $\forall M > 0$ интервал (-M, M) $\subset$ [-M, M], то говорят, что все члены ограниченной последовательности принадлежат M - окрестности точки ноль ($\forall n \ \ x_n \in U(0, M)$)

Определение a_n - последовательности

- $a_n \downarrow$ невозрастающая
- $a_n \uparrow$ неубывающая
- $a_n \downarrow\downarrow$ убывающая
- $a_n \uparrow\uparrow$ возрастающая

1.3 Предел последовательности

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ a, если $\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \ a_n \in U(a, \varepsilon)$ или $|a_n - a| < \varepsilon$

Вне любой окрестности точка a $= \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ находится <u>конечное</u> число членов последовательности

1.4 Бесконечно малые последовательности

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, т.е $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$: $\forall n > N(\varepsilon) \quad |a_n| < \varepsilon$

1. $\{a_n\}, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0; \{b_n\}, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = 0$
2. $\{b_n\}$ - ограничена, $\exists B : |b_n| < B \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

1.5 Бесконечно большие последовательности

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \forall M > 0 \quad \exists N : \forall n > N \Rightarrow a_n > M$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \forall M > 0 \quad \exists N : \forall n > N \Rightarrow a_n < -M$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \forall M > 0 \quad \exists N : \forall n > N \Rightarrow |a_n| > M$

1.6 Основные теоремы

$\forall$ бесконечно большая последовательность является неограниченной. Не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой

1.6.1 Арифметические свойства пределов

1. $\{a_n\} \to a; \quad \{b_n\} \to b \Rightarrow \{c_n\} = \{a_n + b_n\} \to a + b$
   или
   $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_b = a; \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

2. $\{a_n\} \to a; \quad \{b_n\} \to b \Rightarrow \{c_n\} = \{a_n b_n\} \to ab$
   или
   $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_b = a; \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
3. $\{a_n\} \to a; \quad \{b_n\} \to b \neq 0 \Rightarrow \{c_n\} = \frac{a_n}{b_n} \to ab$
   или
   $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_b = a; \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Теорема 1: Предел постоянной равен самой себе $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$

Теорема 2: О единственности предела.

Доказательство: Пусть последовательность сходится к двум разным пределам a и a'. Выберем ε меньше половины расстояния между ними, т.е положим $\varepsilon < \frac{1}{2}|a - a'|$. Найдутся номера $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$ такие, что при $n \geq N_1(\varepsilon)$ будет $|x_n - a| < \varepsilon$, а при $n \geq N_2(\varepsilon)$ будет $|x_n - a'| < \varepsilon$. Поэтому при n большем, чем $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$, точка должна попадать в ε - окрестность числа a и в ε - окрестность числа a', что невозможно, т.к эти окрестности не имеют общих точек.

Теорема 3: Об ограниченности сходящейся последовательности

Любая сходящаяся последовательность ограничена
Доказательство: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \exists M : |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \quad a_n \in U(a, \varepsilon)$ или $|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$ $|a_n| < |a| + \varepsilon$

Положим M = $\max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |a| + \varepsilon\} \Rightarrow \forall n > N \quad |a_n| < M$

Теорема 4: О пределе промежуточной последовательности

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$

$y_n \leq x_n \leq z_n \qquad \forall n = 1, 2, 3 \ldots$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Если $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к одному пределу, то с какого-то момента все y_n и z_n попадут в ε-окрестность предельной точки a. Тогда x_n, зажатые между ними попадает в эту же окрестность

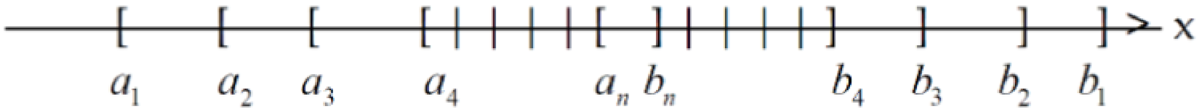
Доказательство:

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} : n > N_1 \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$
$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} : n > N_2 \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = max(N_1, N_2) : a - \varepsilon < y_n < x_n < z_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

1.7 Теорема Больцано-Вейерштрасса и ее следствия

Пусть имеется бесконечная последовательность отрезков на действительной оси $[a_1 b_1], [a_2 b_2], \ldots, [a_n b_n], \ldots$. Таких как изображено на рисунке:



Последовательность называется последовательностью вложенных отрезков. Пусть $d_n = b_n - a_n$ - длина n-ого отрезка ($b_n > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$) и пусть последовательность длин $\{d_n\}$ стремится к нулю, т.е $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$; Тогда $\exists! c \in [a_n b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и при этом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = C$
Существует единственная точка С, общая для всех отрезков

Пусть $\{x_n\}$ - последовательность

Доказательство: Для системы вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим два непустых множества $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, ...\}, \quad B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_1, b_2, ...\}$

Так как $\forall n, m \in \mathbb{N} \to [a_{n+m}; b_{n+m}] \subset [a_n; b_n] \Rightarrow a_n \leq a_{n+m}$;

$\forall n, m \in \mathbb{N} \to [a_{n+m}; b_{n+m}] \subset [a_m; b_m] \Rightarrow b_{n+m} \leq b_m$

Следовательно, $\forall n, m \in \mathbb{N} \to a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_m$

То есть $\forall a \in A,\ b \in B \to a \leq b$

В силу аксиомы непрерывности существует число с такое, что $\forall a \in A,\ b \in B \to a \leq c \leq b$

В частности, $\forall n \in \mathbb{N} \to c \in [a_n, b_n]$, что и требовалось доказать

Доказательство единственности: Допуская противное, предположим, что каждая из двух различных точке с и с' является общей для всех отрезков системы. Пусть, для определенности, с' < с, то есть ε = с - с' > 0. По определению стягивающейся системы, $\exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда $a_n \leq c' < c \leq b_n$. Отсюда

$$a_n \leq c' \Rightarrow -c' \leq -a_n \Rightarrow c - c' \leq c - a_n$$
$$c \leq b_n \Rightarrow c - a_n \leq b_n - a_n$$

Поэтому $\varepsilon = c - c' \leq c - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon$

Получили противоречие.

Определение 1: Подпоследовательностью для $\{x_n\}$ называется бесконечное подмножество $\{x_{n_k}\}$ элементов данной последовательности ($k = 1, 2, \cdots : n_1 < n_2 < n_3 \ldots$)

Пример: $\{x_n\} = \{n\}, n \in \mathbb{N}$, последовательность натуральных чисел;
$\{x_{n_k}\} = \{2k\}, k \in \mathbb{N}$, подпоследовательность четных чисел

Определение 2: Число τ называется частичным пределом данной последовательности $\{x_n\}$, если $\exists$ ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к τ, т.е $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = \tau$

1.7.1 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

В другой формулировке: Любая ограниченная последовательность имеет по меньшей мере один конечный частичный предел.

Итак, дано: последовательность ограничена, т.е $\exists A : |x_n| < A, n = 1, 2 \ldots (1)$
Доказать: $\exists \{x_{n_k}\} : \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = C = const(2)$.

Доказательство: из условия (1) $\Rightarrow$ -A $< x_n <$ A, т.е все x_n принадлежат некоторому отрезку $I_0 = [-A, A]$. Разобьем I_0 пополам и выберем ту половину, на которой содержится бесконечно много элементов x_n. Обозначим этот отрезок I_1. Затем раздели I_1 пополам и выберем ту его половину I_2, которая содержит бесконечно много элементов x_n. Продолжая этот процесс до бесконечности, получим систему вложенных отрезков $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k \supset \ldots$; длины которых стремятся к нулю. В силу аксиомы все I_k имеют общую точку С. Любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \in I_k$ будет сходится к С.

Следствие 1: Любое бесконечное подмножество ограниченной последовательности имеет частичный предел.

Следствие 2: Если все частичные пределы последовательности одинаковы и равны a, то она сходится к a, т.е $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Следствие 3: Последовательности, для которых $\exists$ хотя бы два различных частичных предела, расходящаяся.

Пример: $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ имеет два предела
$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = 1 = c_1$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = -1 = c_2$
$c_1 \neq c_2 \Rightarrow \{(-1)^n\}$ - расходящаяся последовательность

Следствие 4. Т. Вейерштрасса.
Любая монотонная ограниченная последовательность сходится
Монотонно убывающая и ограниченная снизу последовательность сходится

Замечание. Условие ограниченности монотонной последовательности является необходимым и достаточным условием её сходимости. Эта теорема устанавливает только факт существования предела и ничего не говорит о самом пределе.
Однако и это в теории пределов имеет большое значение. Иногда важно только знать, что предел существует.

Пример: $\{x_n\} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+2}, n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \Rightarrow$ Возрастает
$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n}{n+1} \leq 1 \Rightarrow$ Ограничена

1.8 Число e

$\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ Часто это предел называют 2-м замечательным пределом

Справедливы более общие утверждения:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{k_n})^{k_n} = e$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{k_n})^{k_n} = \frac{1}{e}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - a_n)^{\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{e}$

где (k_n) и (a_n) соответственно положительные бесконечно большая и бесконечно малая последовательности, т.е $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

1.9 Критерий Коши сходимости числовых последовательностей

Если A $\Rightarrow$ B, то B-необходимое условие для A, а A-достаточное условие для B.
Если A $\Rightarrow$ B $\wedge$ B $\Rightarrow$ A, то A $\Leftrightarrow$ B или B-необходимое и достаточное условие для A, а также и A необходимое и достаточное условие для B. Теоремы, в которы сформулированы необходимые и достаточные условия чего-либо, т.е

теоремы, содержащие слова "тогда и только тогда"в том и только в том случае"необходимо и достаточно"и т.п, называются критериями

Теорема: Для того, чтобы последовательности $\{x_n\}$ имела конечный предел $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

1.10 Свойства пределов при арифметических действиях над последовательностями

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} c * x_n = c * a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n * y_n) = a * b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

$x_n \le y_n$; тогда $a \le b$