Вектора

Забродин Денис Александрович

29 марта 2023 г.

Содержание

1 Ранг матрицы

Если в матрице А выбрать произвольные k строк и k столбцов, то получим квадрутную матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется минором k-го порядка

Определение: Рангом матрицы называется максимальный порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ – Минор 2-го порядка}$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow rangA = 2$

1.1 Свойства ранга матрицы

1. Для матрицы А размером m x n rang A $\leq$ minm;n
2. Пусть А - квадратная матрица -го порядка, тогда
   (a) Если |A| $\neq$ 0 $\Rightarrow$ rang A = n
   (b) Если |A| = 0 $\Rightarrow$ rang A < n
3. Ранг матрицы = 0 $\Leftrightarrow$ А - нулевая матрица
4. Ранг матрицы не меняется при ее транспонировании

Определение: Пусть rang A = r. Любой, отличный от нуля, минор порядка r этой матрицы называется базисным минором.

Теорема: Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк или столбцов матрицы.

Доказательство: Переставляя строки и столбцы матрицы А, получим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & | & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & M & \dots & | & \dots & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & | & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{r+1,n} & \\ \dots & & & & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{mn} & \end{pmatrix}$$

|M| $\neq$ 0
rang A = r M - базисный минор

Ранг при этом не изменился

Пусть

$$\vec{v}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ – j-й столбец матрицы A: j = 1, ..., n}$$

Рассмотрим $\Sigma = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r\}$ и $\Sigma_1 = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_r\}$, где

$$\vec{w}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{rj} \end{pmatrix}$$

Σ_1 - линейно независима, тк $|\text{M}| \neq 0$

Предположим, что Σ линейно зависима. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация: $\lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_r\vec{v}_r = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + ... + \lambda_r a_{ir} = 0; i = 1, ..., m$

В частности при i = 1,..., r имеем:

$\lambda_1\vec{w}_1 + ... + \lambda_r\vec{w}_r = \vec{0}$ - противоречие, тк Σ_1 - линейно независима $\Rightarrow \Sigma$ - линейно независима

Таким образом, существуют r линейно независимых столбцов.

Рассмотрим $\Sigma' = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r, \vec{v}_p\}$, где $\vec{v}_p$ - столбец матрицы A

Рассмотрим

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} & a_{1p} \\ ... & M & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} & a_{rp} \\ a_{i1} & ... & a_{ir} & a_{ip} \end{vmatrix}$$

1. $1 \leq \text{i} \leq \text{r} \Rightarrow \Delta_i$ имеет две одинаковые строки $\Rightarrow \Delta_i = 0$
2. $\text{i} > \text{r} \Rightarrow \Delta_i$ - минор (r+1)-го порядка матрицы A $\Rightarrow \Delta_i = 0$

тк rang A = r

Разложим Δ_i по последней строке:

$\Delta_i = a_{i1}A_1 + ... + a_{ir}A_r + a_{ip}|M| = 0$

A_j зависят от p, но не зависят от i, тк : j = 1,...,r

Тк $|\text{M}| \neq 0$, то

$a_{ip} = -\frac{A_1}{|M|}a_{i1} - ... - \frac{A_r}{|M|}a_{ir}; i = 1, ..., m$

Обозначим $\lambda_1 = -\frac{A_1}{|M|}; ...\lambda_r = -\frac{A_r}{|M|}$

$\lambda_1, ..., \lambda_r$ не зависят от i $\Rightarrow \vec{v}_p = \lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_r\vec{v}_r \Rightarrow \Sigma'$ - линейно зависима

Таки образом, любые r + 1 столбцов линейно зависимы

Следствие: rang A = dim L($\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$), где L($\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$) - линейня оболочка, порожденная матрицей A

Замечание: Рассмотренная нами теорема лежит в основе одного из методов вычисления ранга матрицы - метода окаймляющих миноров: найдя некоторый, не равный нулю минор, можно перебирать лишь окаймляющие его миноры.

Теорема: Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждой из перемножаемых матриц те

$$rang(A \cdot B) \leq min\{rangA; rangB\}$$

Доказательство:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} \\ ... & & \\ a_{m1} & ... & a_{mk} \end{pmatrix} mxkB = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ ... & & \\ b_{k1} & ... & b_{kn} \end{pmatrix} kxnA{\cdot}B = D = \begin{pmatrix} d_{11} & ... & d_{1n} \\ ... & & \\ d_{m1} & ... & d_{mn} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим векторы

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ ... \\ a_{mi} \end{pmatrix} - \text{i-й столбец матрицы A} \vec{w}_j = \begin{pmatrix} d_{1j} \\ ... \\ d_{mj} \end{pmatrix} - \text{j-й столбец матрицы D}$$

$d_{ij} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{ik}b_{kj} \quad (1.1)$

$\Rightarrow \vec{w}_j = b_{1j}\vec{v}_1 + ... + b_{kj}\vec{v}_k$ j = 1,...,m

В равенстве (1.1) j зафиксируем, а i = 1,..,m

$\Rightarrow \vec{w}_j = b_{1j}\vec{v}_1 + ... + b_{kj}\vec{v}_k; j = 1, ..., n$

$\Rightarrow \vec{w}_j \in L(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k) \Rightarrow L(\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n) \subset L(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k) \Rightarrow dimL(\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n) \leq dimL(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k) \Rightarrow rang(A \cdot B) \leq rangA$

Аналогично показывается, что rang(A $\cdot$ B) $\leq$ rang B (рассматривают по строкам) квадрат

Следствие: Ранг матрицы не меняется при ее умножении на невырожденную матрицу

Доказательство: Рассмотрим произведение A $\cdot$ B, $|B| \neq 0$

rang(A $\cdot$ B) $\leq$ rang A

A = A $\cdot$ (B $\cdot$ B^{-1}) = (A $\cdot$ B) $\cdot$ B^{-1}

rang A = rang ((A $\cdot$ B) $\cdot$ B^{-1}) $\leq$ rang(A$\cdot$ B)

$\Rightarrow$ rang(A $\cdot$ B) = rang A чтд

2 Элементарные преобразования матриц

2.1 Теоремы об элементарных преобразованиях матриц

К элементарным преобразованиям матрицы относят

1. Перестановка местами двух строк(столбцов)
2. Умножение строки на число, отличное от нуля
3. Прибавление к элементам одной строки соотсвтествующих элементов другой строки, умноженных на любое число
4. Добавление или исключение нулевой строки

Определение: Квадратную диагональную матрицу с ненулевыми элементами по диагонали называют простейшей

Теореме: Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к простейшему виду.

Доказательство: Если в матрице есть ненулевые элементы, то ее можно привести к следующему виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1l} \\ b_{21} & ... & b_{2l} \\ ... & & \\ b_{k1} & ... & b_{kl} \end{pmatrix}$$

где $b_{11} \neq 0$

Далее ко 2-ой строке прибавляем 1-ую, умноженную на -$\frac{b_{21}}{b_{11}}$, к 3-ей строке прибавляем 1-ую, умноженную на -$\frac{b_{31}}{b_{11}}$ и тд

В результате получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & ... & ... & b_{1l} \\ 0 & c_{22} & ... & c_{2l} \\ ... & & & \\ 0 & c_{p2} & ... & c_{pl} \end{pmatrix}$$

Далее ко 2-му столбцу прибавляем 1-й, умноженный на -$\frac{b_{12}}{b_{11}}$ к 3 прибавим 1 умноженный на $\frac{b_{13}}{b_{11}}$ и тд

Теорема: Ранг матрицы при элементраных преобразованиях не меняется.

Док-во: Дакажем для столбцов для 3 элементарного преобразования, те прибавление к элементам одного столбца соответсвтующих элементов другого столбца, умноженных на любое число, не меняет ранга матрицы.

Воспользуемся тем, что ранг матрицы A равен размерности линейной оболочки, порожденной матрицей A: rang A = dim L($\vec{V}_1, ..., \vec{V}_n$), где $\vec{V}_1, ..., \vec{V}_n$ - столбцы матрицы A.

Покажем, что L($\vec{V}_1, ..., \vec{V}_i), ..., \vec{V}_j, ..., \vec{V}_n$) = L($\vec{V}_1, ..., \vec{V}_i + \lambda\vec{V}_j, ..., \vec{V}_j, ..., \vec{V}_n$)

Обозначим M = L($\vec{V}_1, ..., \vec{V}_i), ..., \vec{V}_j, ..., \vec{V}_n$)

N = L($\vec{V}_1, ..., \vec{V}_i + \lambda\vec{V}_j, ..., \vec{V}_j, ..., \vec{V}_n$)

Очевидно, что M $\subset$ N

Докажем теперь, что и N $\subset$ M

Возьмем $\forall \vec{u} \in N$

$\vec{u} = \lambda_1\vec{V}_1 + ... + \lambda_i(\vec{V}_i + \lambda\vec{V}_j) + ... + \lambda_j\vec{V}_j + ... + \lambda_n\vec{V}_n = \lambda_1\vec{V}_1 + ... + \lambda_i\vec{V}_i + ... + (\lambda_i\lambda + \lambda_j)\vec{V}_j + ... + \lambda_n\vec{V}_n \Rightarrow \vec{u} \in M \Rightarrow N \subset M \Rightarrow M = N$

Для остальных элементарных преобразований доказателсьство очевидно.

Теорема: С помощью элементарных преобразований только над строками матрицы невырожденную матрицу можно привести к единичной.

Доказательство:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & & & \\ 0 & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{vmatrix} b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & & \\ b_{n2} & ... & b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0; b_{11} \neq 0$$

и так далее получаем верхнетреугольную матрицу

$$\sim\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... \\ 0 & 0 & ... & c_{nn} \end{pmatrix}\sim$$

Затем по аналогии получаем нули над диагональю, те получаем диагональную матрицу с ненулевыми диагональными элементами, те простейшую матрицу

$$\sim\begin{pmatrix} \alpha_1 & ... & 0 \\ ... \\ 0 & ... & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Далее первую строку делим на α_1, вторую строку - на α_2 и тд. В результате получим единичную матрицу.

Замечание: Каждое элементраное преобразование квадратной матрицы можно заменить умножением ее на некоторую невырожденную матрицу. Покажем это для строк на примере матрицы 3 порядка (для наглядности).

$$1)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Берем единичную матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и меняем в ней местами первые 2 строки. В результате получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее умнжоим матрицу B на матрицу A:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2) Умножим вторую строку единичной матрицы на λ. В результате получим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3) Ко второй строке единичной матрицы прибавим первую, умноженную на λ. В результате получим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} + a_{21} & \lambda a_{12} + a_{22} & \lambda a_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2.2 Практический способ нахождения обратной матрицы (метод элементарных преобразований)

Пусть A - невырожденная матрица $\Rightarrow \exists A^{-1}$ - обратная матрица. С помощью элементарных преобразований матрицу A можно привести к единичной $\Rightarrow$ $Q_1 \cdot Q_2 \cdot ... \cdot Q_n \cdot A = E$, но $A^{-1} \cdot A = E$

В силу единственности обратной матрицу получим

$$A^{-1} = Q_1 \cdot Q_2 \cdot ... \cdot Q_n \cdot E$$

Таким образом, для получения обратной матрицы нужно к строкам единичной матрицы применить те же элементарные преобразования, которые приводя т матрицу A к единичной: $(A|E)\sim(E|A^{-1})$

3 Система линейных уравнений. Метод Гаусса

3.1 Система линейных уравнений. Основные понятия

Определение: Системой линейных уравнений называется совокупность уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.1)$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}; \quad b_i \in \mathbb{R}; \quad i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n$

x_j - неизвестные (переменные)

b_i - свободные переменные

Определение: Решением системы (3.1) называетя такая упорядоченная совокупность числа $\vec{\omega} = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ - n-мерное арифметическое пространство), если при подстановке этих чисел в систему вместо переменных $x_1, ..., x_n$ соответственно, каждое уравнение системы обращается в верно равенство.

Определение: Две системы уравнений называются эквивалентными, если они имеют одно и то же множество решений

Определений: Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Система уравнений называется несовместной, если она не имеет ни одного решения.

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0 \quad (3.2)$$

Добавление уравнения (3.2) к системе (3.1) или его исключение из системы приводят к эквивалентной системе.

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b, b \neq 0 \quad (3.3)$$

Если система (3.1) содержит уравнение (3.3), то она не совместна

3.2 Метод Гаусса

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных) рассмотрим на примере.

Пример:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 7 \\ 5x_1 - 3x_2 - 9x_3 + 17x_4 = 19 \\ -3x_1 + 9x_3 - 12x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$$

Решение: Выписывают так называетмую расширенную матрицу

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 7 & | & 7 \\ 5 & -3 & -9 & 17 & | & 19 \\ -3 & 0 & 9 & -12 & | & -6 \\ 1 & 1 & -5 & 5 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 5 & | & -1 \\ 0 & -8 & 16 & -8 & | & 24 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & | & -9 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & | & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & | & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

x_1 и x_2 - базисные переменные

x_3 и x_4 - свободные переменные

$x_3 = c_1$; $x_4 = c_2$

$$X(c_1; c_2) = \begin{pmatrix} 3c_1 - 3c_2 + 2 \\ 2c_1 - c_2 - 3 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{общее решение}$$

3.3 Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.4)$$

$\text{A}\vec{x} = \vec{b} \quad (3.5)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}; \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

$x_1 \cdot \vec{V_1} + ... + x_n \cdot \vec{V_n} = \vec{b} \quad (3.6)$

$$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., V_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ - столбцы матрицы системы (3.4)}$$

Замечание. Из равенства (3.6) следует, что система (3.4) совместна тогда и только тогда, когда вектор $\vec{b}$ есть линейная комбинация столбцов матрицы А, причем коэффициенты линейной комбинации - искомые неизвестные

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ - матрица системы (3.4)}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & | & b_1 \\ ... & & & & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix} \text{- расширенная матрица}$$

Теорема (Кронекера-Капелли). Система (3.4) совместна тогда и только тогда, когда rang A = rang D

Доказательство:

1. **Необходимость**

   Пусть система (3.4) совместна. Тогда из равенства (3.6) следует, что существуют числа $x_1, ..., x_n$ такие, что $\vec{b} = x_1 \cdot \vec{V_1} + ... + x_n \cdot \vec{V_n}$

   $\Rightarrow \vec{b} \in L(\vec{V_1}, ..., \vec{V_n})$ - линейная оболочка

   $\Rightarrow L(\vec{V_1}, ..., \vec{V_n}, \vec{b}) = L(\vec{V_1}, ..., \vec{V_n})$

   $\Rightarrow dimL(\vec{V_1}, ..., \vec{V_n}, \vec{b}) = dimL(\vec{V_1}, ..., \vec{V_n}) \Rightarrow rangA = rangD$

2. **Достаточность**

   rang A = rang D $\Rightarrow dimL(\vec{V_1}, ..., \vec{V_n}, \vec{b}) = dimL(\vec{V_1}, ..., \vec{V_n}) \Rightarrow L(\vec{V_1}, ..., \vec{V_n}, \vec{b}) = L(\vec{V_1}, ..., \vec{V_n})$

   $\Rightarrow \vec{b}$ - линейная комбинация векторов $\vec{V_1}, ..., \vec{V_n}$

   $\Rightarrow$ система (3.4) совместна

Теорема. Если rang A = rang D = n, где n - число неизвестных, то система (3.4) имеет единственное решение

Теорема. Если rang A = rang D < n, где n - число неизвестных, то система (3.4) имеет бесконечное решений

4 Однородные системы линейных уравнений

4.1 Однородные системы линейных уравнений и их свойства

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Определение. Система (4.1) называется однородной системой линейных уравнений

Замечание. Однородная система линейны уравнений всегда имеет решение(например, нулевое)

Теорема. Для того, чтобы однородная система (4.1) имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы rang A < n, где n - число переменных

Рассмотрим свойства решений системы линейных уравнений с точки зрения линейных пространств. Каждое решение системы (4.1) можно рассматривать как вектор линейного пространства арифметических векторов $\mathbb{R}^n$. Обозначим через M - множество всех решений системы (4.1). Тогда M - подмножество в $\mathbb{R}^n$.

Теорема. Множество всех решений M однородной системы (4.1) является линейным пространством.

Доказательство.

$M \subset \mathbb{R}^n$. Берем любые два решения $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2 \subset M$

$\Rightarrow A\vec{\omega}_1 = \vec{o}$ и $A\vec{\omega}_2 = \vec{o}$, где A - матрица системы (4.1)

$\Rightarrow A(\lambda_1\vec{\omega}_1 + \lambda_2\vec{\omega}_2) = \lambda_1 A\omega_1 + \lambda_2 A\vec{\omega}_2 = \vec{o}$

$\Rightarrow \lambda_1\vec{\omega}_1 + \lambda_2\vec{\omega}_2 \in M$

$\Rightarrow$ M образует линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$ чтд

Определение. Базис пространства решений однородной системы (4.1) называется фундаментальной системой решений (ФСР) системы (4.1)

Если $B = \{\vec{\omega}_1, ..., \vec{\omega}_k\} \subset M$ - ФСР для системы (4.1), то любое решение системы (4.1) можно представить в виде:

$$\vec{\omega}_{o.o} = c_1\vec{\omega}_1 + ... + c_k\vec{\omega}_k \quad (4.2)$$

где $c_1, ..., c_k$ - произвольные числа

$\vec{\omega}_{o.o}$ - общее решение однородной системы (4.1)

(4.2) - общая структура решения однородной системы линейных уравнений

Теорема. Размерность пространства решений однородной системы (4.1) равна n - r, где r = rang A, A - матрица системы (4.1), т - число неизвестных, те

$$dimM = n - r$$

Замечание. Размерность пространства решений однородной системы совпадает с числом векторов, образующих ФСР. Число векторов, образующих

ФСР, совпадает с количеством свободных переменных. В свою очередь, количество свободных переменных всегда равно n - r, где r = rang A, A - матрица системы, n - число переменных

4.2 Общая структура решения неоднородной системы линейных уравнений

Рассмотрим системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n} = b_1 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn} = b_m \end{cases} \qquad (4.3)$$

(4.3) - неоднородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n} = 0 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn} = 0 \end{cases} \qquad (4.4)$$

(4.4) - однородная система линейных уравнений

Теорема. Общее решение системы (4.3) представляется в виде суммы общего решения системы (4.4) и произвольного частого решения системы (4.3): $\vec{\omega}_{o.n} = \vec{\omega}_{o.o} + \vec{\omega}_{c.n}$ (4.5)

где $\vec{\omega}_{o.n}$ - общее решение неоднородной системы (4.3)
$\vec{\omega}_{o.o}$ - общее решение однородной системы (4.4)
$\vec{\omega}_{c.n}$ - произвольное частное решение неоднородной системы (4.3)

Доказательство:

1. Рассмотрим прозиовльный вектор вида $\vec{\omega} = \omega_{o.o} + \omega_{c.n}$

   $\Rightarrow$ A$\vec{\omega} = A(\omega_{o.o} + \omega_{c.n}) = A\omega_{o.o} + A\omega_{c.n} = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b}$, где A - матрица системы (4.3); $\vec{b}$ - вектор - столбец свободных членов

   $\Rightarrow$ любое решение вида (4.5) является решением системы (4.3)

2. Покажем, что любое решение системы (4.3) представляется в виде (4.5)

   Берем любое решение $\vec{\omega}$ системы (4.3), те A$\vec{\omega} = \vec{b}$

   Рассмотрим разность векторов $\vec{\omega} - \vec{\omega_{c.n}}$

   $A(\vec{\omega} - \vec{\omega_{c.n}}) = A\vec{\omega} - A\vec{\omega_{c.n}} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$

   $\Rightarrow \vec{\omega} - \vec{\omega_{c.n}}$ - решение системы (4.4) чтд

Пусть $\vec{\omega_1}, ..., \vec{\omega_k}$ - ФСР системы (4.4)

$\Rightarrow \vec{\omega_{o.n}} = c_1\vec{\omega_1} + ... + c_k\vec{\omega_k} + \vec{\omega_{c.n}} \quad (4.6)$

где $c_1, ..., c_k$ - произвольные числа

(4.6) - Общая структура решения неоднородной ситсемы линейных уравнений

5 Отображение множеств

5.1 Понятие отображения множеств. Основные определения

Определение. Отображением f множества X во множество Y называется закон, посредством которого произольному элементу x ∈ X ставится в сответсвие однозначно определенный элемент y ∈ Y.

Обозначение. f: X → Y

Определение. Элемент y называется образом элемент x, а x - прообразом элемента y

Замечание. Запись y = f(x) или x $\rightarrow^f$ y означает, что элемент x при отображении f переходит в элемент y

Определение. Отображения f: X → Y и g: x → y называются равными, если f(x) = g(x) $\forall x \in X$

5.2 Композиция отображений

5.3 Обратное отображение

5.3.1 Свойства обрати ых отображений

1. Обратное отображение единственно
2. Композиция обратимых отображений обратима, при этом

$$(f \cdot g)^{-1} = g^{-1} \cdot f^{-1}$$

Доказательство: Композиция $f \cdot g$ обратима, как композиция биективных отображений, при этом, если $g : X \rightarrow Y$ и f: Y → Z, то

$(f \cdot g)(g^{-1} \cdot f^{-1}) = f(gg^{-1})f^{-1} = fe_yf^{-1} = ff^{-1} = e_z$

$(g^{-1} \cdot f^{-1})(f \cdot g) = g^{-1}(f^{-1} \cdot f)g = g^{-1}e_yg = g^{-1}g = e_x$

6 Линейные операторы

Определение. Линейным опреатором в линейном пространстве V называется отобржанеие $\hat{A}$: V $\to$ V, обладающее свойствами:

1. $\hat{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}$
2. $\hat{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\hat{A}\vec{x} \quad \forall\vec{x},\vec{y} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$

Замечание. $\hat{A} : V \to V$ - линейный оператор, если

$\hat{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\hat{A}\vec{x} + \beta\hat{A}\vec{y} \quad \forall\vec{x},\vec{y} \in V,\ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Замечание. Два линейных оператора равны, если $\hat{A}\vec{x} = \hat{B}\vec{x}$

6.1 Матрица линейного оператора

Пусть $\hat{A} : V \to V$ - линейный оператор в линейном пространстве V, Пусть B $= \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$

Подейтсвуем линейным опретатором набазисные векторы:

Пусть

$$\begin{cases} \hat{A}\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + ... + a_{n1}\vec{e}_n \\ \hat{A}\vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + ... + a_{n2}\vec{e}_n \\ ... \\ \hat{A}\vec{e}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + ... + a_{nn}\vec{e}_n \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Матрица A называется матрицей линейного опретаора $\hat{A}$ в базисе B.

Замечание. Чтобы найти матриу линейнго оператора, нужно подействовать опретаором на базисные вектора. Столбцы матрицы линейного оператора - это координатаы образов базисных векторов.

$\hat{A}\vec{x} = \hat{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\hat{A}\vec{e}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}\vec{e}_i = \sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}x_i)\vec{e}_i$

$$\hat{A}\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j$$

В силу единственности разложения вектора по базису:

$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i, \quad j = \overline{1, n}$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ ... \\ y_n = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Преобразование координат вектора $\vec{x}$ при действии оператора $\hat{A}$ (6.1)

Матричный вид (6.1):

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}_B = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B \qquad (6.2)$$

6.2 Композиция линейных операторов

Пусть $\hat{A} : V \to V$ и $\hat{B} : V \to V$ - линейные операторы в линейном пространстве V. Пусть B $= \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ - базис в V. Пусть A и B - матрицы линейных операторов.

$\hat{A} \cdot \hat{B} : V \to V$ - композиция операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$

Пусть D - матрица композиций $\hat{A} \cdot \hat{B}$ в базисе B.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B \to (\hat{B}) \to y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}_B = B \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \to (\hat{A}) \to \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}_B =$$

$$= A \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}_B = A(B \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B) = AB \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B \Rightarrow D = AB$$

6.3 Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса

Пусть

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B \text{ и } \vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}_B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}_{B'}$$

Связь координат вектора $\vec{x}$ в базисах B и B'

Пусть

$$\hat{A}\vec{x} = \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}_B = A \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

$$\hat{A}\vec{x} = \vec{y} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ ... \\ y'_n \end{pmatrix}_{B'} = A' \begin{pmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}_{B'}$$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ ... \\ y'_n \end{pmatrix}_B = C^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}_B = C^{-1}A \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B = C^{-1}AC \begin{pmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}_{B'} = A' \begin{pmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}_{B'}$$

$\Rightarrow A' = C'AC$

7 Действия с линейными операциями

7.1 Основные операции над линейными операторами

Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ - линейные операторы в линейном пространстве V. Пусть A и B - матрицы в некотором базисе

Над линейными операторами вводится следующие операции:

1. Сложение операторов

   $(\hat{A} + \hat{B})\vec{x} = \hat{A}\vec{x} + \hat{B}\vec{x}$ при этом $(\hat{A} + \hat{B}) = A + B$, где $(\hat{A} + \hat{B})$ - матрица оператора $\hat{A} + \hat{B}$

2. Умножение оператора на число

   $(\lambda\hat{A})\vec{x} = \lambda\hat{A}\vec{x}$, при этом $(\lambda\hat{A}) = \lambda A$, где $(\lambda\hat{A})$ - матрица оператора $\lambda\hat{A}$

3. Умножение операторов

   $(\hat{A}\hat{B})\vec{x} = \hat{A}(\hat{B}\vec{x})$, при этом $(\hat{A}\hat{B}) = AB$, где $(\hat{A}\hat{B})$ - матрица оператора $\hat{A}\hat{B}$

7.2 Обратный линейный оператор

Определение. Обратным к оператору $\hat{A}$ называется оператор $\hat{A}^{-1}$ такой что $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{E}$, где $\hat{E}$ - единичный оператор

Теорема. Операторы $\hat{A} + \hat{B};\ \lambda\hat{A};\ \hat{A}\hat{B};\ \hat{A}^{-1}$ - линейные операторы

Доказательство.

1. $\hat{A}^{-1}(\vec{x} + \vec{y}) = \hat{A}^{-1}\vec{x} + \hat{A}^{-1}\vec{y}$

   пр $\hat{A}(\hat{A}^{-1}\vec{x} + \hat{A}^{-1}\vec{y}) = \hat{A}\hat{A}^{-1}\vec{x} + \hat{A}\hat{A}^{-1}\vec{y} = (\hat{A}\hat{A}^{-1})\vec{x} + (\hat{A}\hat{A}^{-1})\vec{y} = \vec{x} + \vec{y}$

   лев $\hat{A}(\hat{A}^{-1}(\vec{x} + \vec{y})) = \hat{A}\hat{A}^{-1}(\vec{x} + \vec{y}) = \hat{E}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y}$

2. $\hat{A}^{-1}(\lambda\vec{x}) = \lambda\hat{A}^{-1} \Rightarrow \hat{A}^{-1}$ - линейный оператор

Найдем матрицу обратной оператора

Пусть $\hat{A}^{-1}$ - лин обратный оператор. Пусть A и X - матрицы операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}^{-1}$ в произвольном базисе.

$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{E} \Rightarrow AX = XA = E \Rightarrow X = A^{-1}$

Теорема. Линейный оператор обратим т и тт, когда его матрица в произвольном базисе не вырождена

Данная теорема является следствием того, что A^{-1} - это матрица оператора $\hat{A}^{-1}$ в некотором базисе, обратного к оператору $\hat{A}$, заданному матрицей A в этом же базисе. Матрица A обратима т и тт, когда она не вырождена. При этом обратная матрица $\hat{A}^{-1}$ единственная

8 Ядро и образ линейного оператора

Определение. $\mathrm{Ker}\hat{A} = \{\vec{x} \in V | \hat{A}\vec{x} = 0\}$ - ядро лин оператора $\hat{A}$

$\mathrm{Im}\hat{A} = \{\vec{y} = \hat{A}\vec{x} | \vec{x} \in V\}$ - образ лин оператора $\hat{A}$

Замечание. $\mathrm{Ker}\hat{A} \subset$ V; $\mathrm{Im}\hat{A} \subset$ V

Теорема. Ядро и образ линейного оператора являются лин подпространством.

Док-во. для ядра

Пусть $\vec{x}$ и $\vec{y} \in \mathrm{Ker}\hat{A} \Rightarrow \hat{A}\vec{x} = \vec{0}$ и $\hat{A}\vec{y} = \vec{0}$

$\hat{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\hat{A}\vec{x} + \beta\hat{A}\vec{y} = \alpha\vec{0} + \beta\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in Ker\hat{A} \quad \forall\vec{x}, \vec{y} \in Ker\hat{A}, \quad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Ker$\hat{A}$ - линейное подпространство в лин пространстве V

Аналогично Im$\hat{A}$ - лин подпространство в V

Определение. Рангом линейного оператора называется размерность его образа, а дефектом - размерность ядра, те

$rang\hat{A} = dimIm\hat{A}; \quad def\hat{A} = dimKer\hat{A}$

Теорема. Если B = $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ - базис лин пространства V, то Im$\hat{A}$ = L($\hat{A}\vec{e}_1$,...,$\hat{A}\vec{e}_1$)

Доказательство.

$L(\hat{A}\vec{e}_1, ..., \hat{A}\vec{e}_n) = L$ - линейная оболочка образованная образами базисных векторов.

$Im\hat{A} = L \Leftrightarrow Im\hat{A} \subset L, \quad L \subset Im\hat{A}$

1. Im$\hat{A} \subset$ L

   $\forall\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i \Rightarrow \hat{A}\vec{x} = \hat{A}(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\hat{A}\vec{e}_i \in L \Rightarrow Im\hat{A} \subset L$

2. L $\subset$ Im$\hat{A}$

   $\forall\vec{y} \in L : \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i\hat{A}\vec{e}_i = \hat{A}(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i) = \hat{A}\vec{x} \Rightarrow \vec{y} \in Im\hat{A} \Rightarrow L \subset Im\hat{A}$

Теорема. Ранг линейного оператора равен рангу его матрицы в произвольном базисе.

Доказательство.

$rang\hat{A} = dimIm\hat{A} = dimL(\hat{A}\vec{e}_1, ..., \hat{A}\vec{e}_n)$

где $\hat{A}\vec{e}_1, ..., \hat{A}\vec{e}_n$ - столбцы матрицы A. чтд

Теорема. Если $\hat{A} : V \to V$ - линейный оператор, то

$$rang\hat{A} + def\hat{A} = dimV$$

Доказательство. Пусть $dimV = n$

Пусть $B' = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k\}$ - базис Ker$\hat{A}$. Дополним его до базиса B.

$B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, ..., \vec{e}_n\}$

$Im\hat{A} = L(\hat{A}\vec{e}_1, ..., \hat{A}\vec{e}_k, \hat{A}\vec{e}_{k+1}, ..., \hat{A}\vec{e}_n) = L(\hat{A}\vec{e}_{k+1}, ..., \hat{A}\vec{e}_n)$

тк $\hat{A}\vec{e}_1 = \vec{o}, ..., \hat{A}\vec{e}_k = \vec{o}$

Покажем, что векторы $\hat{A}\vec{e}_{k+1}, ..., \hat{A}\vec{e}_n$ линейно независимы. Используем "метод от противного". Пусть это не так, те пусть векторы $\hat{A}\vec{e}_{k+1}, ..., \hat{A}\vec{e}_n$ линейно зависимы. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация:

$$\lambda_{k+1}\hat{A}\vec{e}_{k+1} + ... + \lambda_n\hat{A}\vec{e}_n = \vec{o}$$

Тогда, тк $\hat{A}$ - линейный оператор, получим:

$$\hat{A}(\lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1} + ... + \lambda_n\vec{e}_n) = \vec{o}$$

$\Rightarrow \lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1} + ... + \lambda_n\vec{e}_n \in Ker\hat{A}$

$\Rightarrow$ вектор $\lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1} + ... + \lambda_n\vec{e}_n$ линейно выражается через векторы $\vec{e}_1, ...\vec{e}_k$, тк B' - базис ядра

$\Rightarrow$ векторы $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, ..., \vec{e}_n$ линейно зависимы - противоречие, тк $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, ..., \vec{e}_n\}$ - базис

$\Rightarrow dimIm\hat{A} = n - k \Rightarrow dimKer\hat{A} = k$

$\Rightarrow rang\hat{A} + def\hat{A} = n$ чтд

Теорема. Линейный оператор $\hat{A}$ обратим титт, когда Ker$\hat{A} = \{\vec{o}\}$

9 Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

9.1 Определение собственных векторов и собственных значений линейного оператора. Оператор простого типа

Определение. Пусть $\hat{A} : V \to V$ - линейный оператор в линейном пространстве V. ненулевой вектор $\vec{x} \in V$ называется собственным вектором оператора $\hat{A}$, соответствующим собственному значению λ, если $\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ (8.1) (те если при действии оператор $\hat{A}$ вектор $\vec{x}$ переходим сам в себя, в λ раз растянутый)

Замечание. (краткое определение) Если $\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad \vec{x} \neq \vec{o}$, то $\vec{x}$ - собсвенный вектор оператора $\hat{A}$ с собственным значением λ

Теорема. Собственные векторы $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_k$ линейного оператор, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, ..., \lambda_k$, линейно независимы.

Доказательство. Применим ММИ по k/

1. Для k = 1 утверждение верно, тк собственный вектор является ненулевым по определению (а система из одного вектора линейно независима титт, когда этот вектор ненулевой).

2. Пусть утверждение верно для любой системы из k-1 векторов.

   Докажем его для k векторов $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_k$

   Рассмотрим равенство

$$a_1\vec{x}_1 + ... + a_k\vec{x}_k = \vec{o} \quad (8.2)$$

   Под действием оператора $\hat{A}$ равенство (8.2) перейдет в равенство:

$$a_1\lambda_1\vec{x}_1 + ... + a_k\lambda_k\vec{x}_k = \vec{o} \quad (8.3)$$

   Умножим обе части равенства (8.2) на λ_k и вычтем полученное равенство из (8.3). В результате получим:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)\vec{x}_1 + ... + a_{k-1}(\lambda_{k_1} - \lambda_k)\vec{x}_{k-1} = \vec{o} \quad (8.4)$$

   В силу индуктивного предположения, из (8.4) следует, что

$$a_1 = ... = a_{k-1} = 0$$

   Тогда из (8.2) следует, что $a_k\vec{x}_k = \vec{o}$. Тк $\vec{x}_k \neq \vec{o} \Rightarrow a_k = 0 \Rightarrow \vec{x}_1, ..., \vec{x}_k$ - линейно независимы (тк линейная комбинация (8.2) - тривиальная) чтд

Следствие. Линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве, не может иметь более чем n различных собственных значений.

Пример:

1. $\hat{A} : V^3 \to V^3, \vec{a} \neq \vec{o}$ - фиксированный вектор; $\hat{A}\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$

   $\hat{A}\vec{a} = [\vec{a}, \vec{a}] = \vec{o} = 0 \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a}$ -собсвенный вектор с собственным значением $\lambda = 0$

2. $\hat{A} : V^2 \to V^2; \hat{A}$ - оператор поворота на угол $\phi = 15°$ - не имеет ни одного собственного вектора, тк ни один ненулевой вектор такого поворота не останется коллинеарным самому себя

Определение. Линейный оператор $\hat{A} : V \to V$ называется оператором простого типа, если в линейном пространстве V существует базис из собственных векторов оператора $\hat{A}$

Теорема. Линейный оператор $\hat{A} : V \to V$ является оператором простого тимпа титт, когда в пространстве V существует базис, в котором оператор $\hat{A}$ имеет диагональную матрицу

Доказательство. Пусть dimV = n. Согласно определеню оператор $\hat{A}$ является оператором простого типа титт, когда он меет n линейно независимых собственных векторов $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$. Это равносильно существованию базиса $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, в котором матрица оператора $\hat{A}$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

где $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - собственные значения, соответсующие собственным векторам $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$

Действительно

$$\hat{A}\vec{e}_1 = \lambda_1\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}_B, \hat{A}\vec{e}_1 = \lambda_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ .... \\ 0 \end{pmatrix}_B, ..., \hat{A}\vec{e}_n = \lambda_n\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$$

B - собственный базис чтд

Таким образом, в собственном базисе матрица линейного оператора имеет диагональный вид, причем по диагонали стоят его собственные значения.

Следствие. В n-мерном линейном пространстве линейный оператор, имеющий n различных собственных значений, является оператором простого типа.

Замечание. Обратное утверждение неверно, те не всякий оператор простого типа имеет n различных собственных значений

Замечание. В соответсвие с (8.5) оператор простого типа называют также диагонализуемым оператором

Пример. $\hat{A} : V^3 \to V^3$ - оператор зеркального отражения относительно плоскости Q.

Рассмотрим три вектора: $\vec{e}_1 \perp Q; \vec{e}_2 \parallel Q; \vec{e}_3 \parallel Q; \vec{e}_2 \parallel \vec{e}_3$

$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - базис в V^3, тк векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно независимы (тк они не компланарны). Кроме того, $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - собственный базис, тк

$\hat{A}\vec{e}_1 = -\vec{e}_1 = -1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$

$\hat{A}\vec{e}_2 = \vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$

$\hat{A}\vec{e}_3 = -\vec{e}_3 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{матрица оператора } \hat{A} \text{ в базисе B}$$