Вектора

Забродин Денис Александрович

7 декабря 2022 г.

Содержание

1 Координаты запись линейных действий над векторами

Пусть задана некоторая декартова система координат и векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

Тогда $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$

$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$

Доказательство:

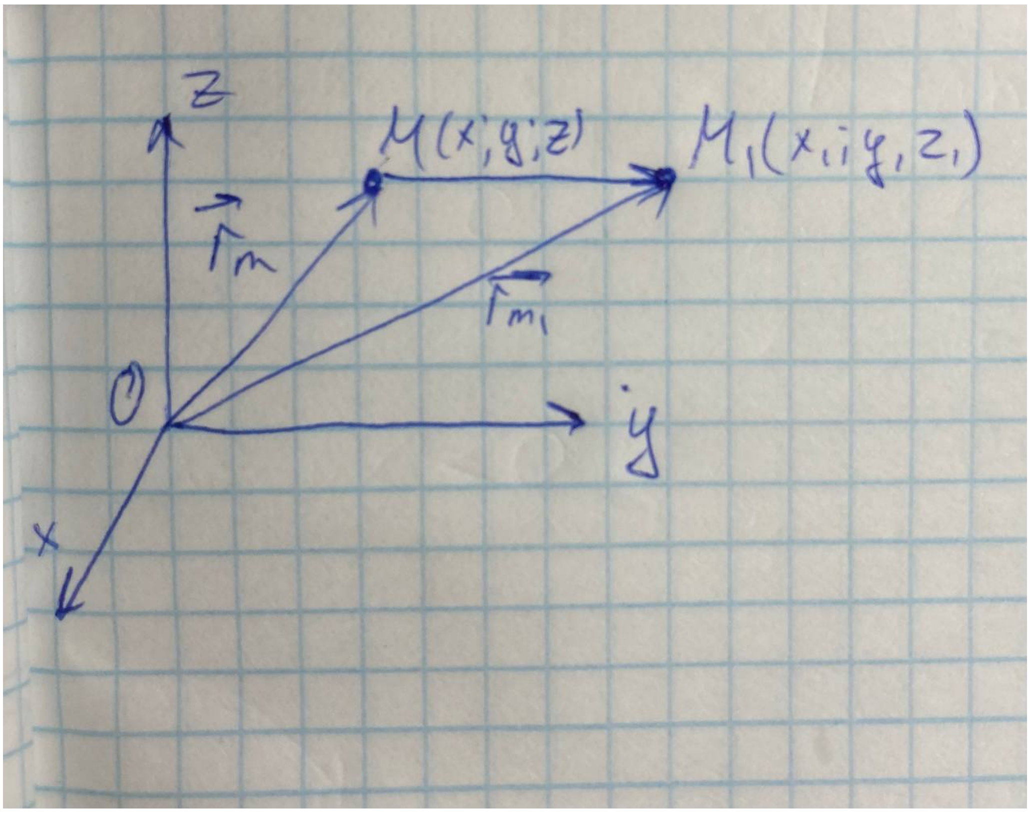
Пусть $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$

$x_3 = \text{пр}_{ox}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_{ox}\vec{a} + \text{пр}_{ox}\vec{b} = x_1 + x_2$

Аналогично $y_3 = y_1 + y_2; z_3 = z_1 + z_2$

2 Координаты точки в пространстве

Определение: Координаты точки M в декартовой системе координат называются координаты ее радиус-вектора $\vec{r_M}$

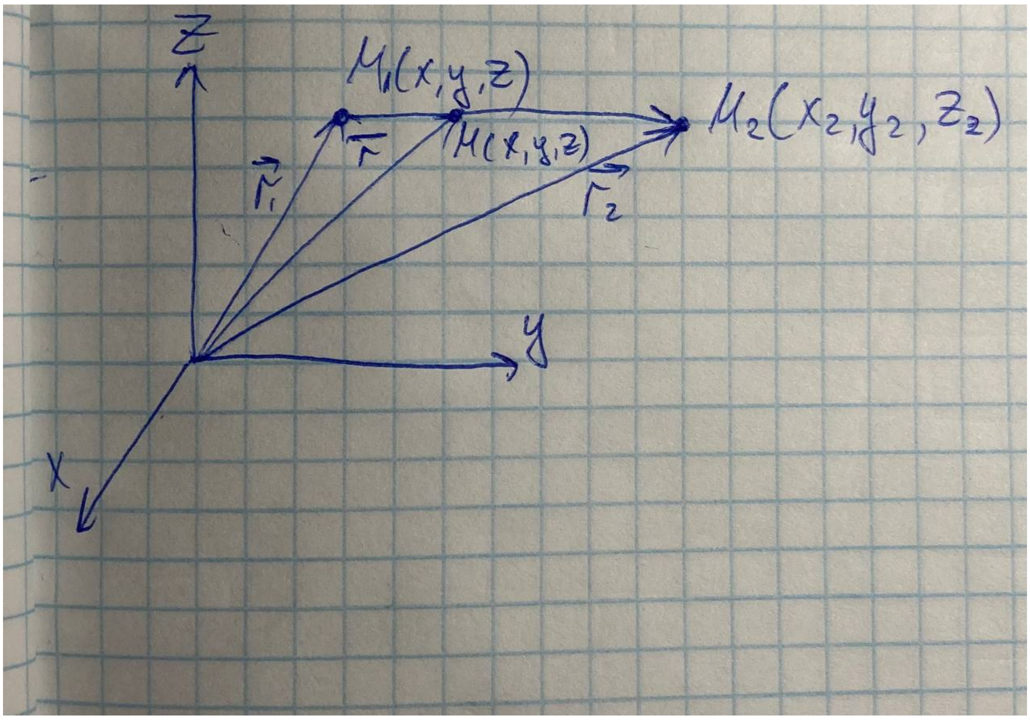


$M(x; y; z) \Rightarrow \vec{r_M} = (x; y; z)$

$M\vec{M}_1 = \vec{r_{M_1}} - \vec{r_M} = (x_1 - x; y_1 - y; z_1 - z)$

$MM_1 = |M\vec{M}_1| = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$

2.1 Деление отрезка в данном отношении



Пусть задано, что $M_1\vec{M} = \lambda M\vec{M}_2$

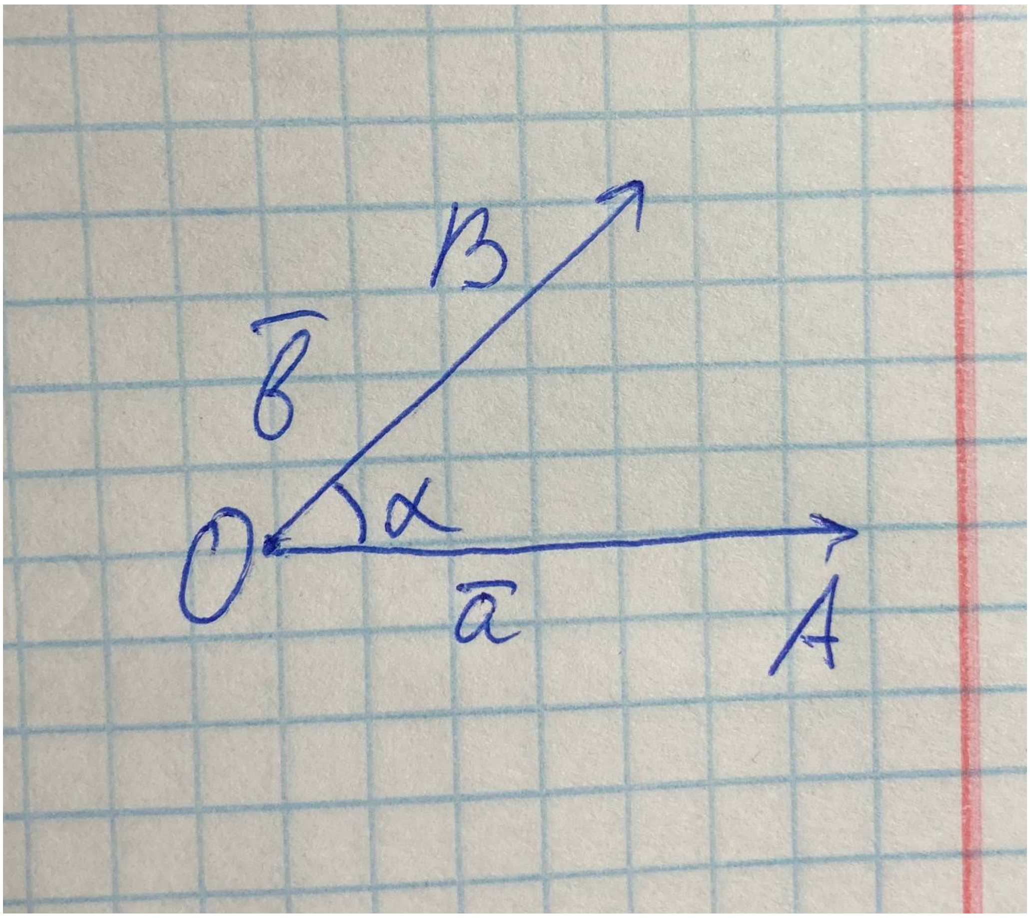
$M_1\vec{M} = \vec{r} - \vec{r_1}; M\vec{M}_2 = \vec{r_2} - \vec{r}$

$\vec{r} - \vec{r_1} = \lambda(\vec{r_2} - \vec{r}) \Rightarrow \vec{r} = \frac{\vec{r_1} + \lambda\vec{r_2}}{1+\lambda} \quad (\lambda \neq 1)$

В координатной форме получим:

$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$

3 Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов



Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - ненулевые векторы.Приведем их к одному началу - точка O. Пусть $\vec{a} = \vec{OA}; \vec{b} = \vec{OB}$

Определение: Углом α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол AOB

Замечание: $0 \leq \alpha \leq \pi$

Определение: Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|cos\alpha$$

$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|cos\alpha \Rightarrow \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}$

3.1 Свойства скалярного произведения

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
2. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$

3. $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftarrow \vec{a}|\vec{b}$, если $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$

4. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$

Доказательство 2:

$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = |\vec{c}|\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}(pr_{\vec{c}}\vec{a} + pr_{\vec{c}}\vec{b}) = |\vec{c}|pr_{\vec{c}}\vec{a} + |\vec{c}|pr_{\vec{c}}\vec{b} = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c})$

3.2 Координатная запись скалярного произведения в данной декартовой системе координат

Пусть $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$(\vec{a},\vec{b}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$
$(x_1\vec{i}, x_2\vec{i}) + (x_1\vec{i}, y_2\vec{j}) + (x_1\vec{i}, z_2\vec{k}) + (y_1\vec{j}, x_2\vec{i}) + (y_1\vec{j}, y_2\vec{j}) + (y_1\vec{j}, z_2\vec{k}) + (z_1\vec{k}, x_2\vec{i}) +$
$(z_1\vec{k}, y_2\vec{j}) + (z_1\vec{k}, z_2\vec{k}) =$
$x_1x_2(\vec{i},\vec{i}) + x_1y_2(\vec{i},\vec{j}) + x_1z_2(\vec{i},\vec{k}) + y_1x_2(\vec{j},\vec{i}) + y_1y_2(\vec{j},\vec{j}) + y_1z_2(\vec{j},\vec{k}) + z_1x_2(\vec{k},\vec{i}) +$
$z_1y_2(\vec{k},\vec{j}) + z_1z_2(\vec{k},\vec{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

3.3 Угол между векторами

Пусть $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$cos\alpha = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, где α угол между векторами

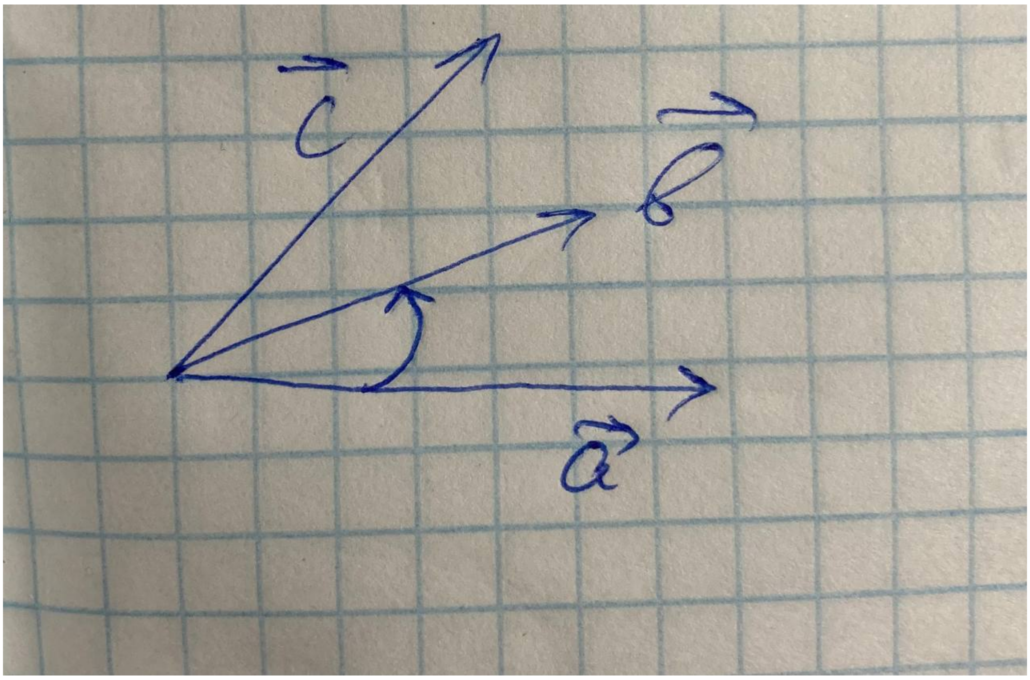
$\Rightarrow cos\alpha = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

3.4 Векторное произведение векторов

Определение: Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Определение: Тройку векторов, приведенных к одному началу, называют упорядоченной, если известно, какой из этих векторов считается первым, какой вторым и какой третьим

Определение: Упорядоченная тройка некомалнархых векторов называется прроаво, если из конеца третьего вектора кратчайший поворот от 1-го вектора ко 2-ому виден против часовой стрелки

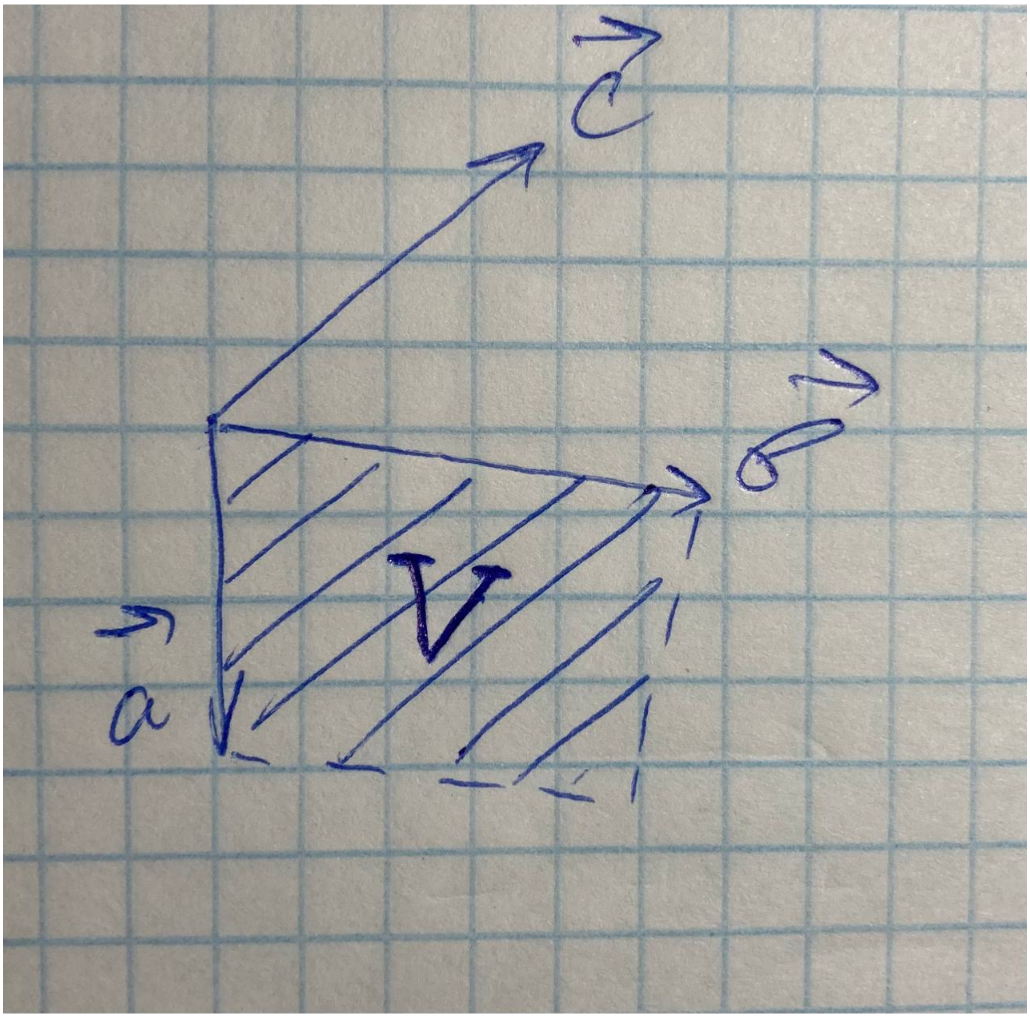


Определение: Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называетвся вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $\vec{c} \perp \vec{a} \perp \vec{b}$
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|sin\alpha$, где α - угол между векторами
3. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - правая тройка

3.5 Свойство векторного произведение

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
2. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$
3. $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$
4. $[\vec{a}, \vec{b}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}||\vec{b}$
5. Если $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, то $|\vec{c}| = S$, где S - площадь параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$



3.6 Координатаня запсь векторнрого произведения в данной декартовой системы координат

Пусть $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$[\vec{a}, \vec{b}] = [x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}] = [x_1\vec{i}, x_2\vec{i}] + [x_1\vec{i}, y_2\vec{j}] + [x_1\vec{i}, z_2\vec{k}] + \dots = x_1x_2[\vec{i}, \vec{i}] + x_1y_2[\vec{i}, \vec{j}] + x_1z_2[\vec{i}, \vec{k}] + \dots = x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} + \dots = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} =$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

4 Смешанное произведение векторов

Определение: Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное

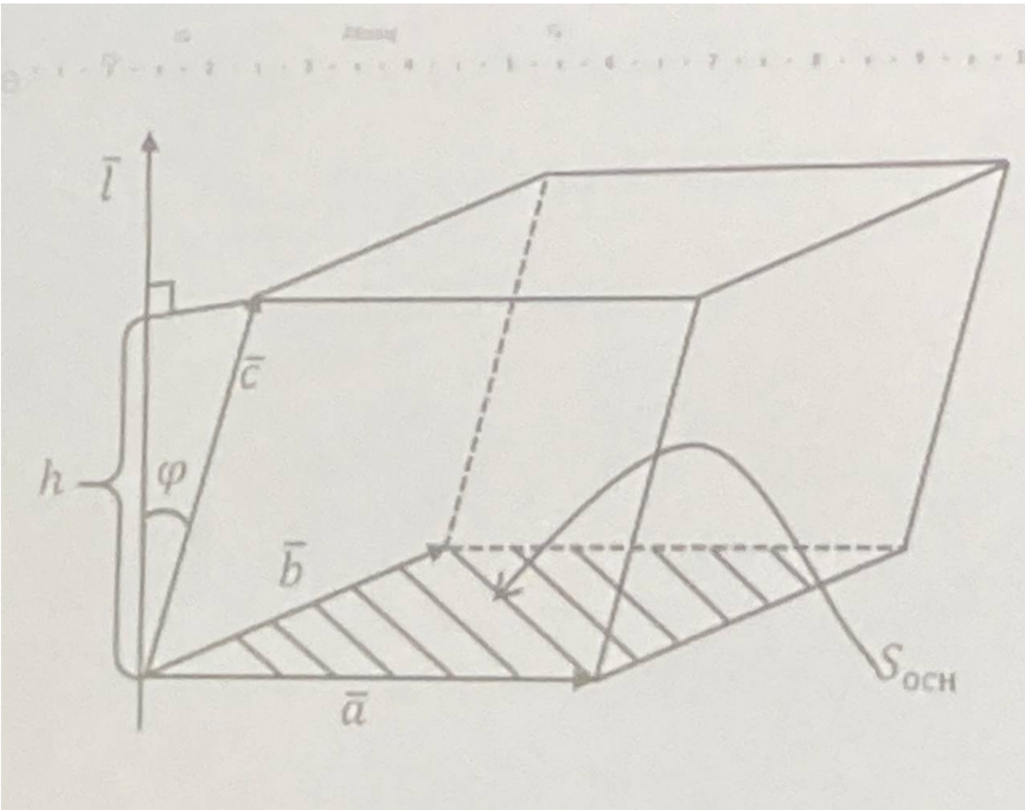
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$$

Теорема: Пусть V - объем параллелепипеда, простоенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

Тогда:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{cases} +V, & (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - righttriplet \\ -V, & (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - lefttriplet \\ 0, & (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - complanarny \end{cases}$$

Доказательство:



$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = |\vec{c}||[\vec{a}, \vec{b}]|cos\phi = |\vec{c}|cos\phi S_{base} = \pm h \cdot S_{base} = \pm V$

Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - правая тройка $\Rightarrow$ ϕ - острый угол $\Rightarrow$ $\cos\phi > 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = +$V

Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - левая тройка $\Rightarrow$ ϕ - тупой угол $\Rightarrow$ $\cos\phi < 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$ -V

Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - компланарны $\Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{c} \Rightarrow ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

5 Координатная запсь смешанног произведения в данной декартовой системе координат

Пусть $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \quad \vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) =$

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 =$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

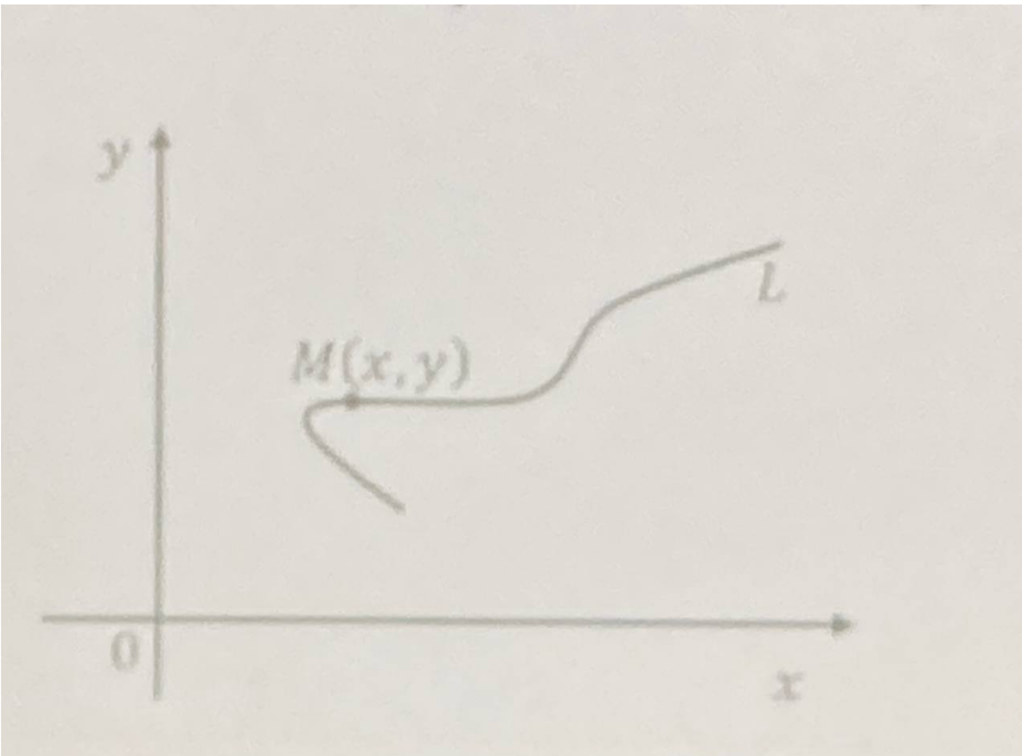
Основаное свойство смешанного произведения состоит в том, что циклическая пересановка векторов не меняет его величины

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

В остальных случаях знак меняется на противоположный

6 Линии на плоскости. Уравнения прямой на плоскости. Кривые 2-го порядка

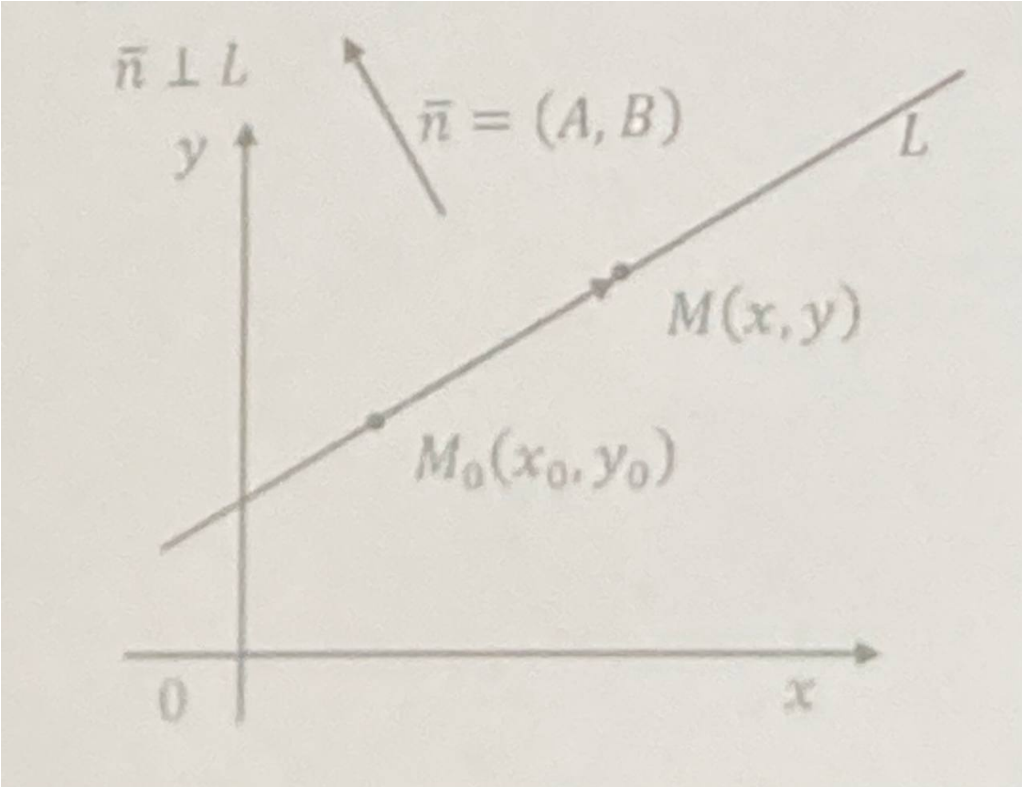
Пусть на плоскости задана декартова система координат и некоторая линия L.



Определение: Уравнение Φ(x, y) = 0 называется уравнением линии L, есил этому уравненнию удовлетворяют координаты любой точки этой линии, и не удовлетворяют координаты точке, не принадлежащих линии L.

6.1 Уравнение прямой на плоскости

Теорема: Любая прямая на плоскости задается уравнением вида Ax + By + C = 0 (9.1)



И обратно: всякое уравнение вида (9.1) определяет на плоскости прямоую

Доказательство:

$\vec{n}$ - нормальный вектор

Возьмем произвольную точку M(x, y) $\in$ L.

т. M(x, y) $\in$ L $\Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{M_0M} \Leftrightarrow (\vec{n}, \vec{M_0M}) = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

Раскроем скобки: $Ax - Ax_0 + By - By_0 = [-Ax_0 - By_0 = C] = 0 \Rightarrow Ax + By + C = 0$

Проводя обратные рассуждения, получим, что уравнение вида (9.1) опрделяет на плоскости прямую.

(9.2) - Уравнение прямой, проходящей черзе точку $M_0(x_0, y_0)$ перепендикулярно нормальному вектору $\vec{n}$ = (A, B)

(9.1) - общее уравнение прямой

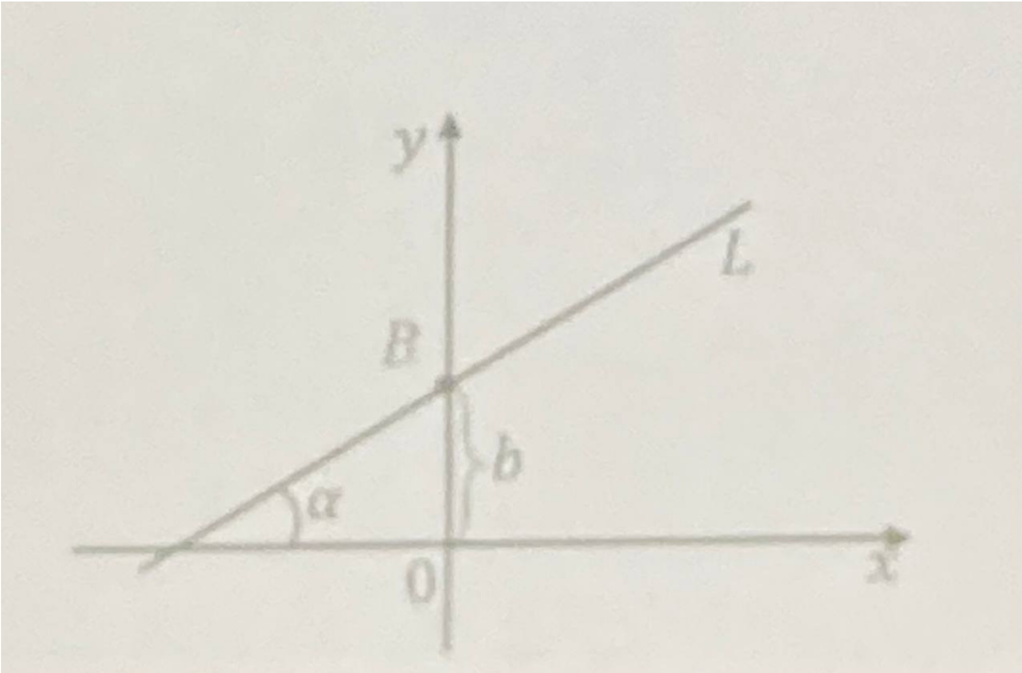
Пусть в (9.1) $B \neq 0 \Rightarrow By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

ОБозначим $k = -\frac{A}{B}; \quad b = -\frac{C}{B}$, получим уравнение.

$$y = kx + b$$

(9.3) - уравнение прямой с угловым коэффициентом

Нутрудно показать, что k = tgα; b = OB

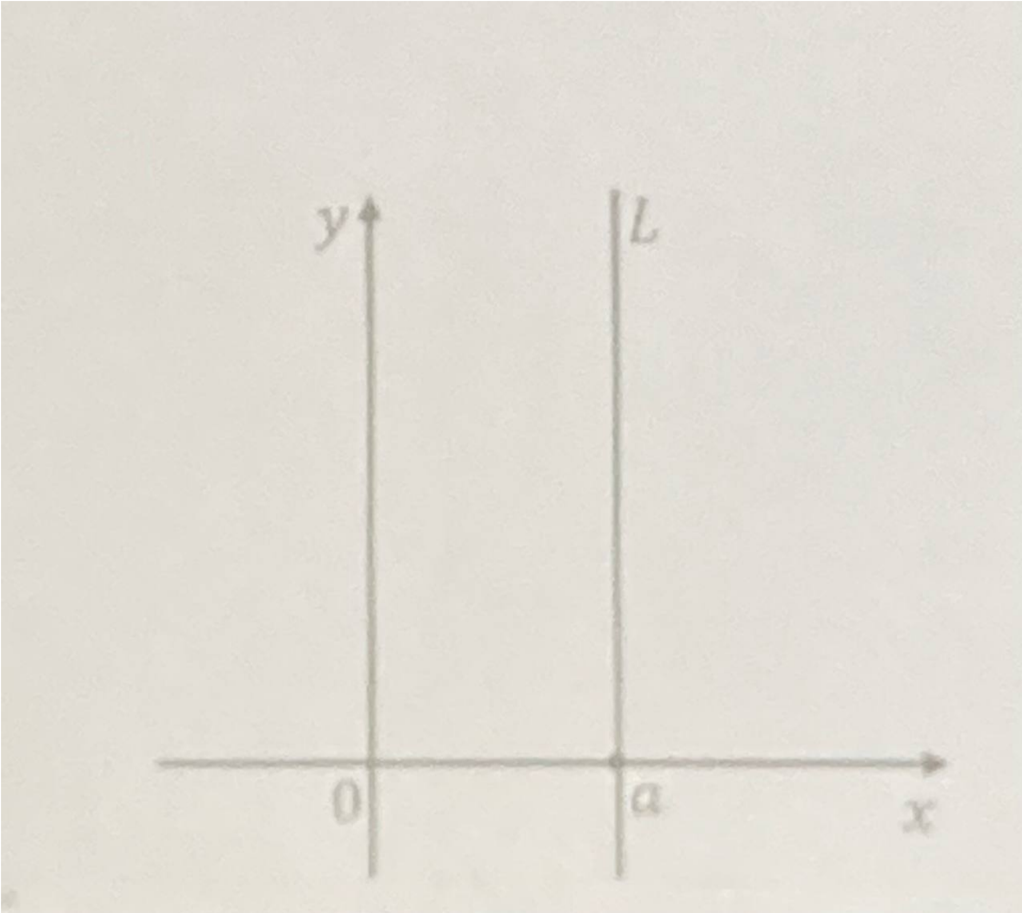


Пусть в (9.1) B = 0 $\Rightarrow$ Ax + C = 0 $\Rightarrow$ x = -$\frac{C}{A}$

Обозначим a = -$\frac{C}{A}$, получим уравнение

$$x = a \qquad (9.4)$$

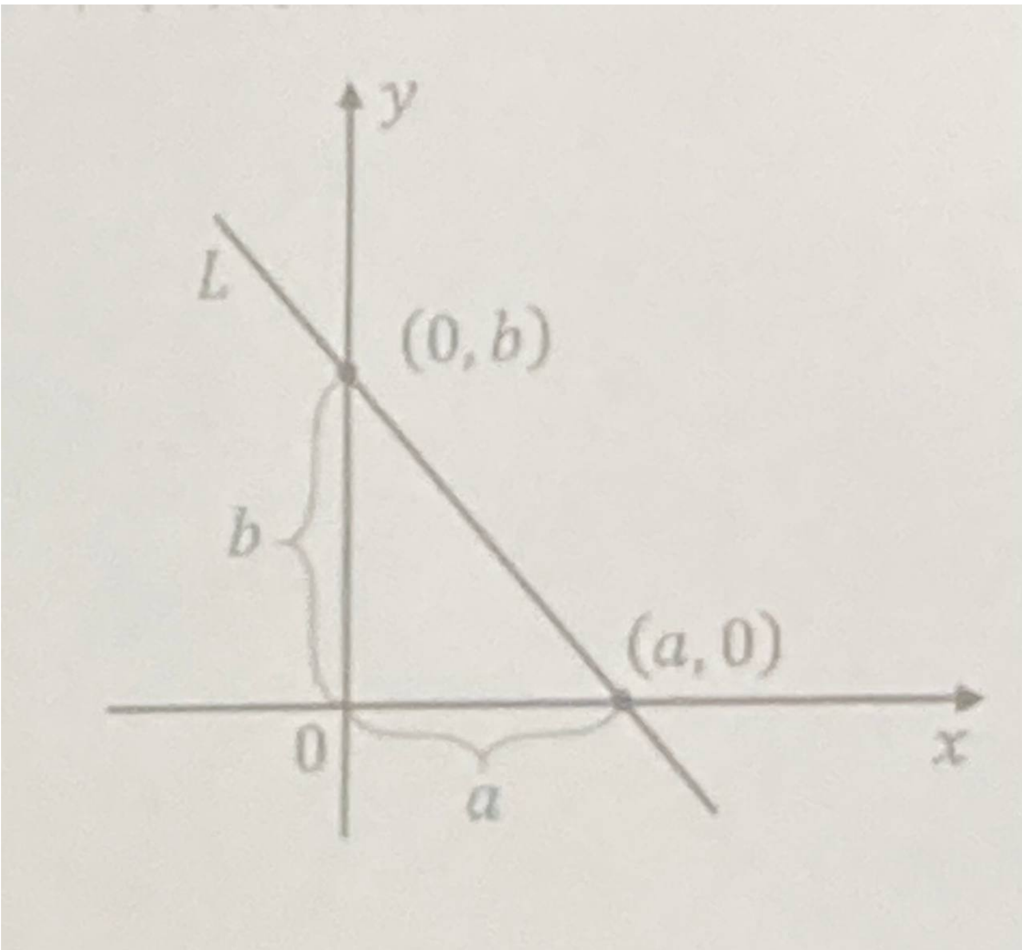
(9.4) - Уравнение вертикальной прямой



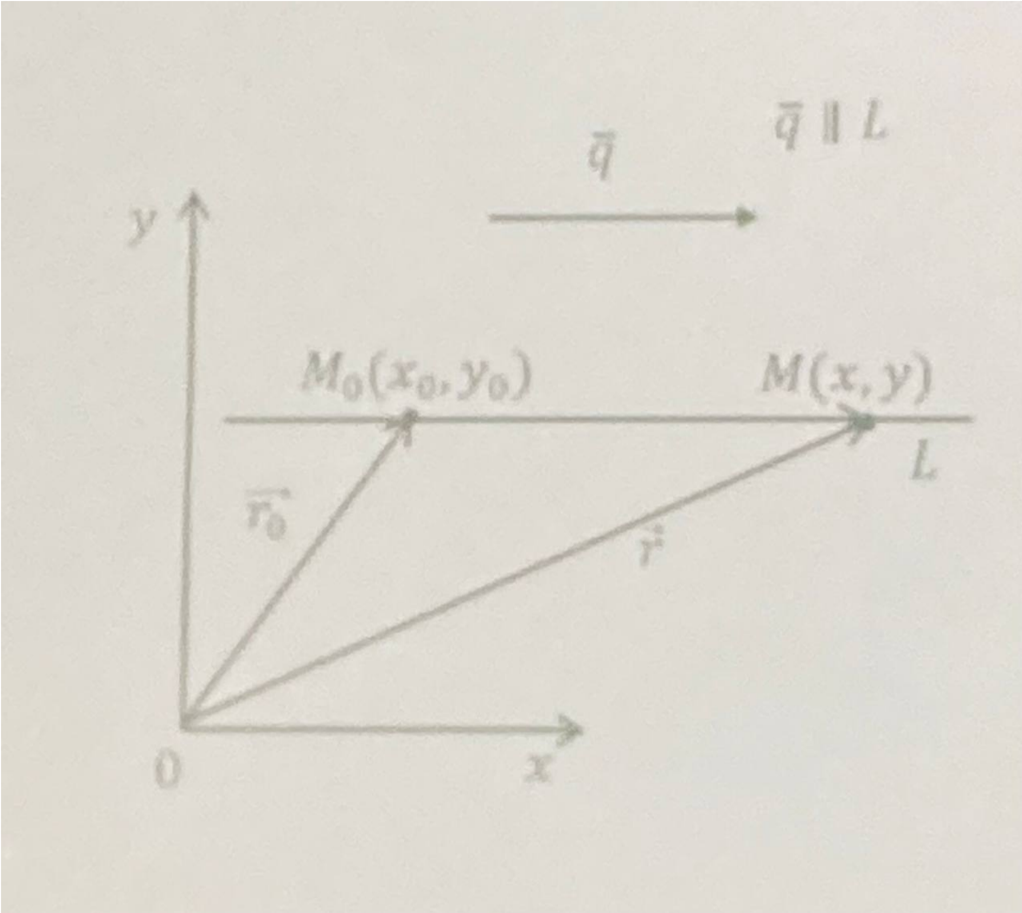
(9.1) можно записать в виде: $\frac{xA}{-C} + \frac{yB}{-C} = 1$

Обозначим a = -$\frac{C}{A}$; b = -$\frac{C}{B}$ $\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (9.5)

(9.5) - уравнение прямой в отрезках


y
L
(0, b)
b
(a, 0)
0
a
x

6.2 Параметрическое уравнение прямой



$\vec{q} = (l, m)$ - направляющий вектор

$\vec{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0} = t * \vec{q} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r_0} + t * \vec{q}$

или в координатной форме

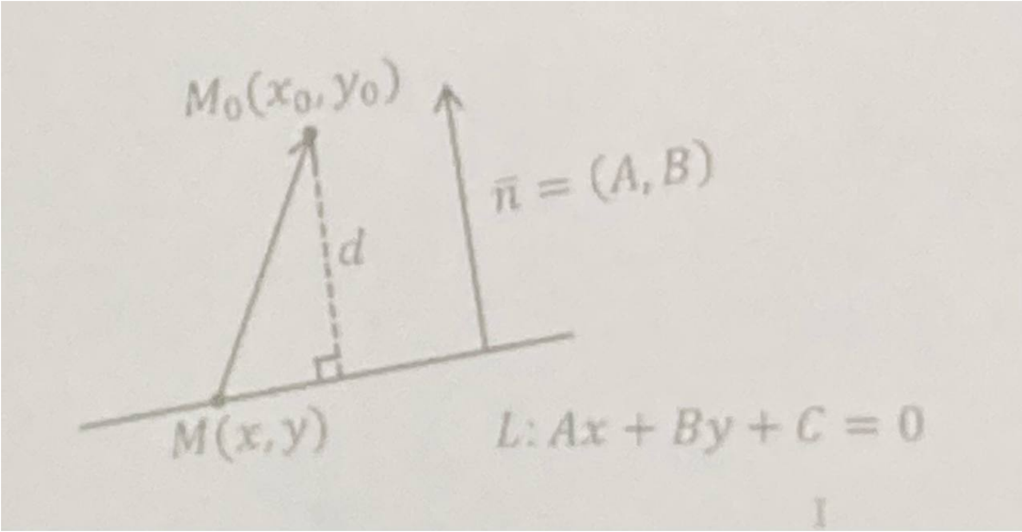
$$\begin{cases} x = x_0 + t * l \\ y = y_0 + t * m \end{cases}$$

(9.6) и (9.7) - параметрические уравнения прямой.

Из (9.7) $\Rightarrow \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$ (9.8)

(9.8) - каноническое уравнение прямой, проходящей через т. $M_0(x_0, y_0)$ с направляющимм вектором $\vec{q} = (l, m)$

6.3 Расстояние от точки до прямой



$M\vec{M}_0 = (x_0 - x; y_0 - y)$

d = пр $_{\vec{n}} M\vec{M}_0 = |\frac{(\vec{n}, M\vec{M}_0)}{|\vec{n}|}| = |\frac{A(x_0-x)+B(y_0-y)}{|\vec{n}|}| = |\frac{Ax_0+By_0+(-Ax-By)}{|\vec{n}|}| = |\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}|$

$d = |\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}| \qquad (9.9)$

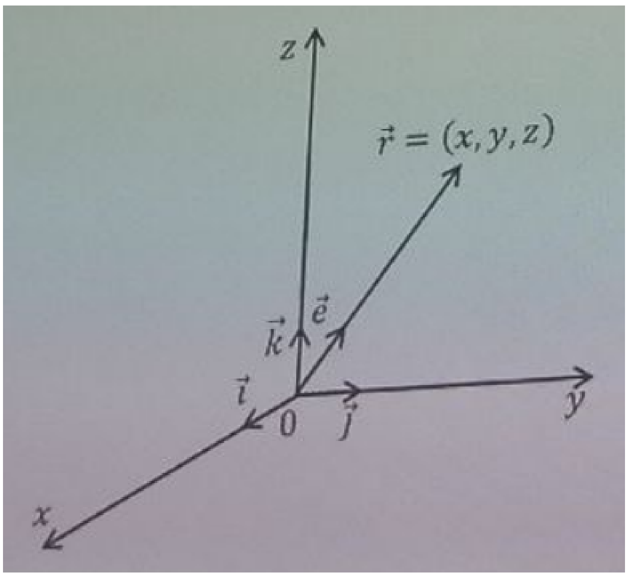
7 Направляющие косинусы

Обозначим $\alpha = (\widehat{\vec{r}, \vec{i}})$; $\beta = (\widehat{\vec{r}, \vec{j}})$; $\gamma = (\widehat{\vec{r}, \vec{k}})$

cosα, cosβ и cosγ - направляющие косинусы вектора $\vec{r}$

Тк x = пр$_{\vec{i}}\vec{r}$; y = пр$_{\vec{j}}\vec{r}$; z = пр$_{\vec{k}}\vec{r}$

x = $|\vec{r}|$cosα; y = $|\vec{r}|$cosβ; z = $|\vec{r}|$cosγ

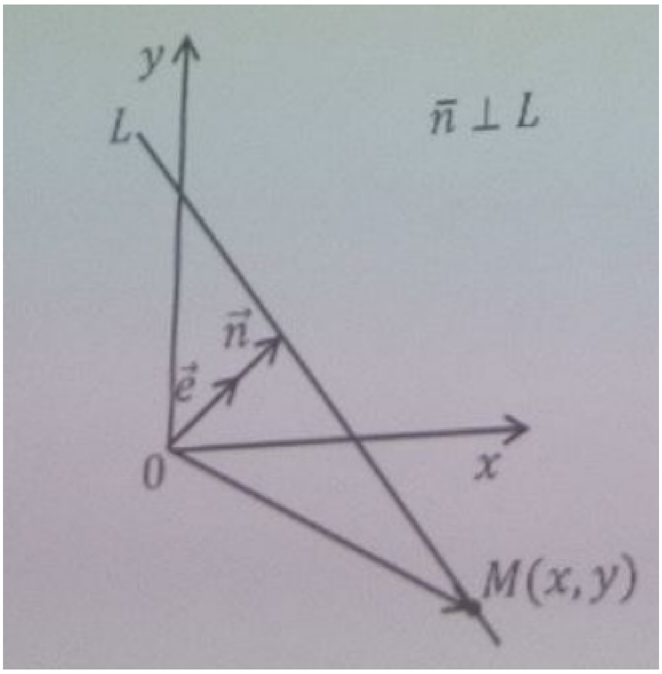


7.1 Нормальное уравнение прямой

$\vec{e} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$; где $\vec{e} = (cos\alpha, cos\beta)$

$\vec{OM} = (x, y)$. Обозначим р = $|\vec{n}|$

р = пр$_{\vec{e}}\vec{OM} = \frac{(\vec{OM}, \vec{e})}{|\vec{e}|} = xcos\alpha + ycos\beta \Rightarrow xcos\alpha + ycos\beta - p = 0$ (9.11)



(9.11) - нормальное уравнение прямой, где cosα и cosβ - направляющие косинусы нормального вектора, направленного из начала координат в сторону прямой, а р - расстояние от начала координат до прямой.

7.2 Угол между прямыми

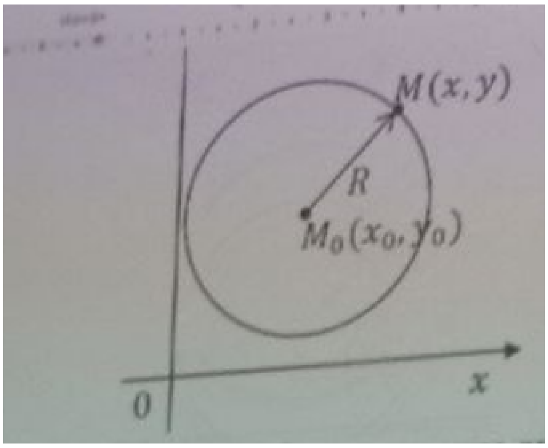
$L_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0; \quad L_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Обозначим $\alpha = (\widehat{L_1, L_2})$

$$cos\alpha = |\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} * \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}|$$

7.3 Кривые второго порядка

Определение: Окружность - это геометрическое место точке на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.



$R = |\vec{MM_0}| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \Rightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$ - уравнение окружности с центром в т (x_0, y_0) и радиусом R

$x^2+y^2 = R^2$ - уравнение окружности с центром в начале координат(каноническое уравнение)

Определение: Эллипсом называется геометрическое место точке на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

$|\vec{F_1M}| + |\vec{F_2M}| = 2a$, где $\vec{F_1M}$ и $\vec{F_2M}$ - фокальные радиусы.

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \qquad (9.15)$

Полагая $b^2 = a^2 - c^2$ из (9.15) нетрудно получить уравнение

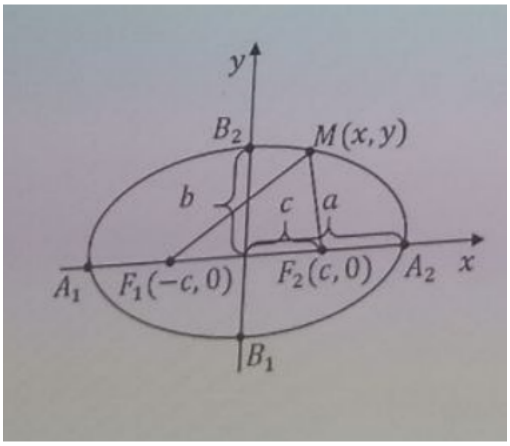
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (9.16)$$

(9.16) - каноническое уравнение эллипса

$|\vec{F_1F_2}|$ - фокусное расстояние; a и b - большая и малая полуоси эллипса.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет; $0 < \varepsilon < 1$

ε - мера "сплюснутости"; $\varepsilon = 0$ - окружность



Определение: Гипербола - это геометрическое место точек на плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная

$||\vec{F_1M}| - |\vec{F_2M}|| = 2a$

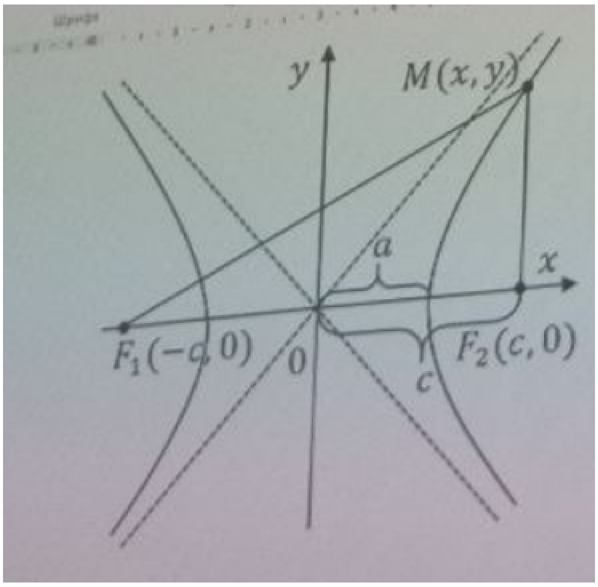
$|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a$

Путем эквивалентных преобразований получим уравнение $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9.18)$

(9.18) - каноническое уравнение гиперболы

a и b - действительная и мнимая полуоси гиперболы.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет, $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ - директрисы гиперболы и эллипса; прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ - асимптоты гиперболы.

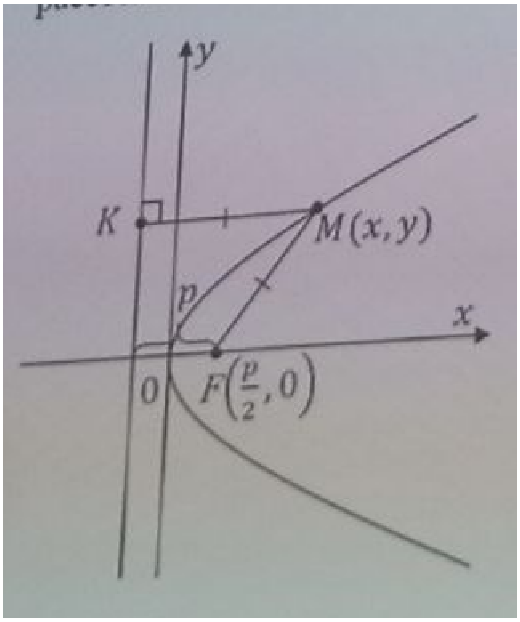


Определение: Парабола - это геометрическое место точке на плоскости, для которых расстояние до данной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой прямой, называемой директрисой.

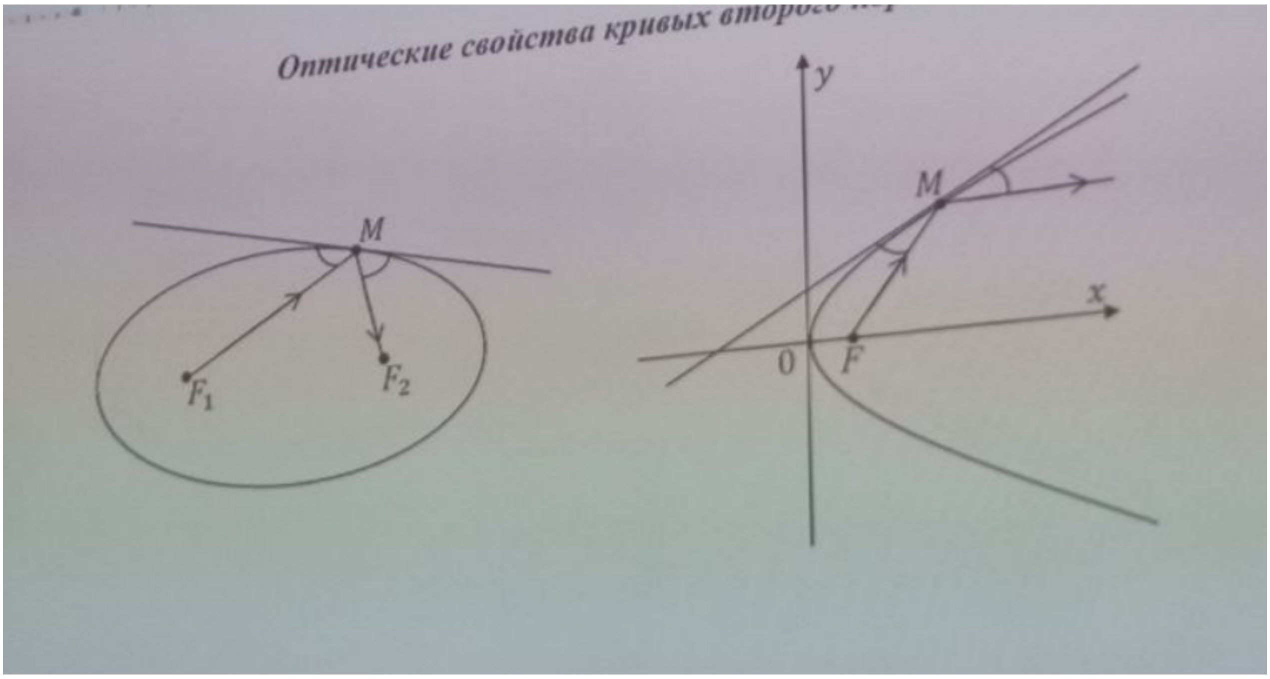
p - параметр параболы (p > 0)

KM = FMx + $\frac{p}{2} = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$

Путем эквивалентных преобразований получим уравнение $y^2 = 2px$ - каноническое уравнение параболы

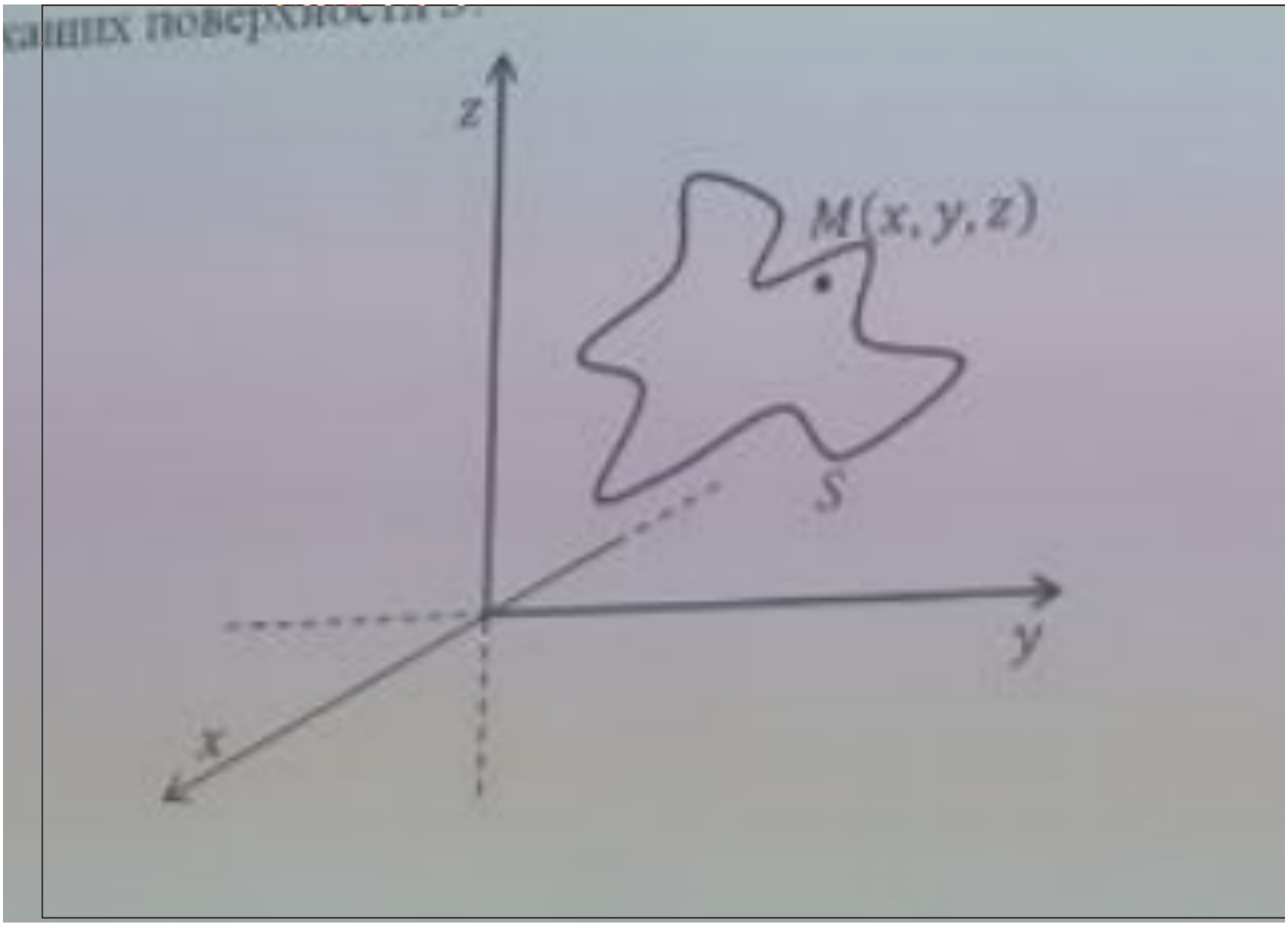


7.4 Оптические свойства кривых второго порядка



7.5 Уравнение плоскости в пространстве

Определение: уравнение Φ(x,y,z) = 0 называется уравнением поверхности S, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки этой поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих поверхности S



7.6 Уравнение плоскости в пространстве

Теорема: Любая плоскость в пространстве задается уравнением вида Ax + By + Cz + D = 0

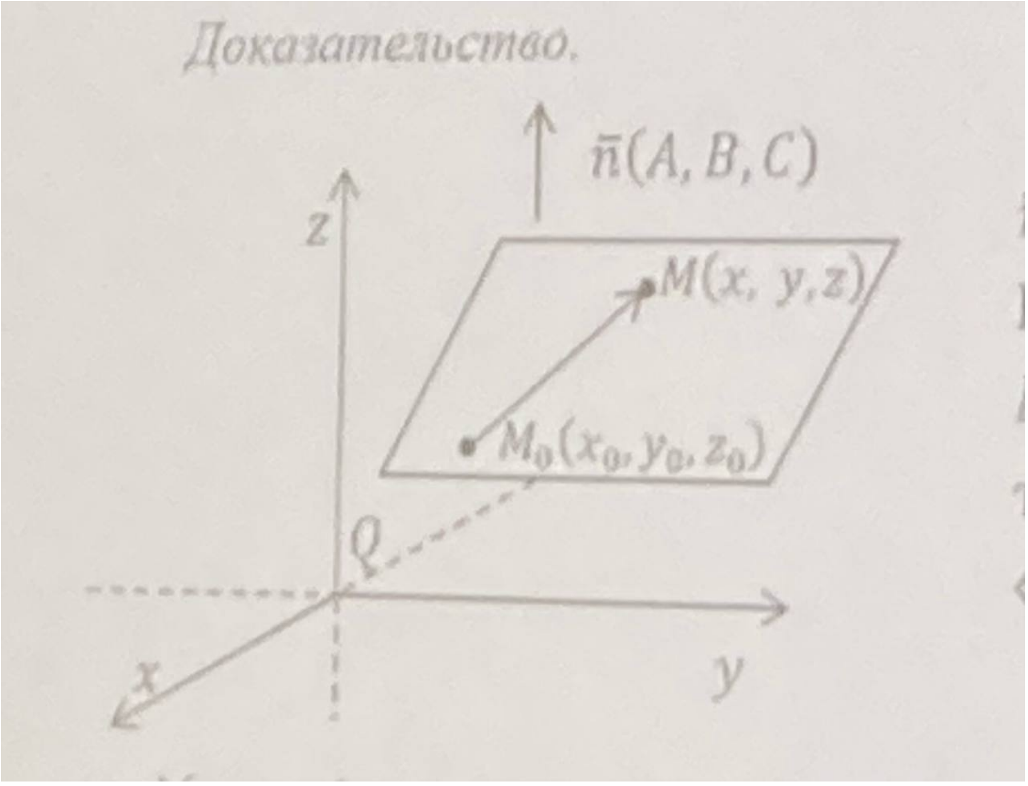
И обратно: всякое уравнение этого вида определяет в пространстве плоскость

8 Уравнение плоскости в пространстве

Теорема: Любая плоскость в пространстве задается уравнением вида $Ax + By + Cz + D = 0$

И обратно: всякое уравнение вида (10.1) определяет в пространстве плоскость

Доказательство:



$\vec{n} \perp Q$, $\quad \vec{n}$ - нормальный вектор

Возьмем произвольную точку $M(x, y, z) \in Q$

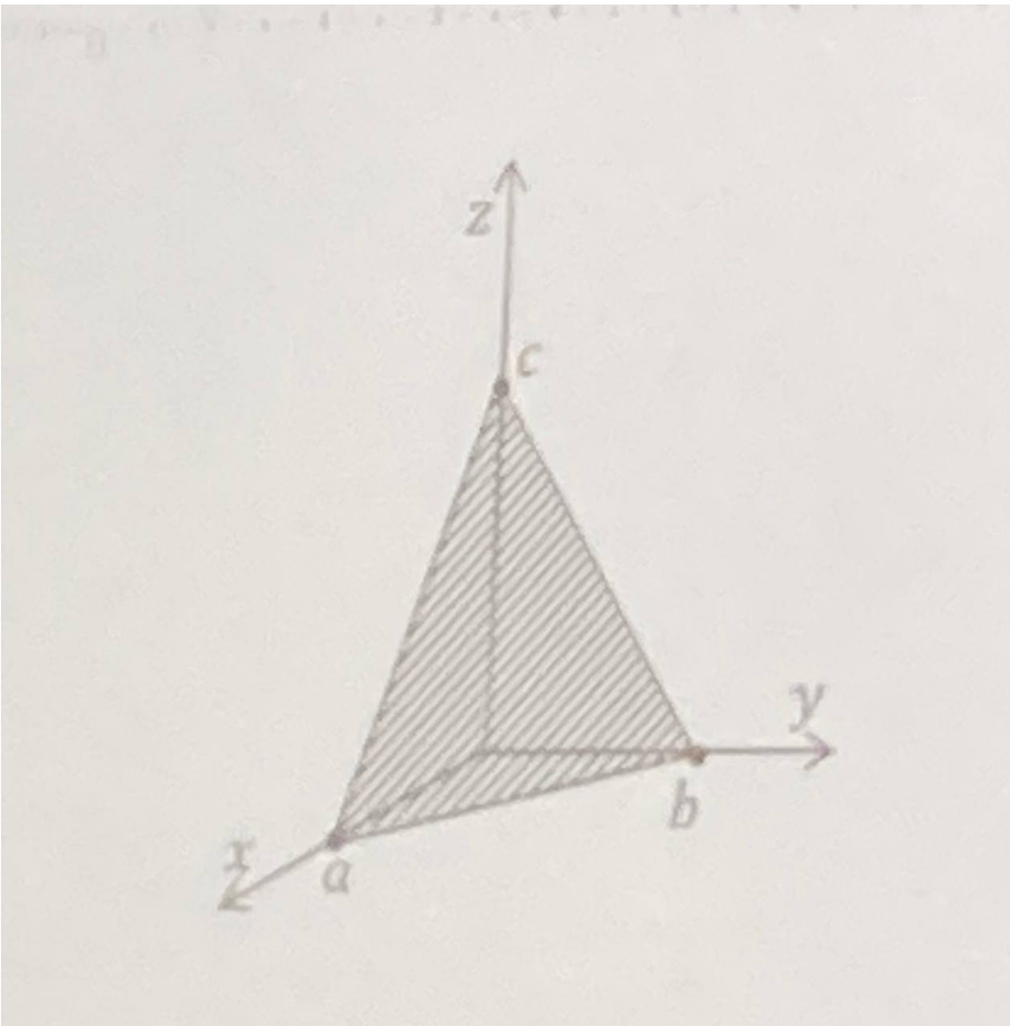
т $M(x, y, z) \in Q \Leftrightarrow \vec{n} \perp M\vec{M}_0 \Leftrightarrow (\vec{n}, M_0\vec{M}) = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (10.2)$

Раскроем скобки: $Ax - Ax_0 + By - By_0Cz - Cz_0 = [-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D] = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$

Проводя обратные рассуждения, получим, что уравнение вида (10.1) определяет в пространстве плоскость.

(10.1) - общее уравнение плоскости

(10.2) - уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A, B, C)$



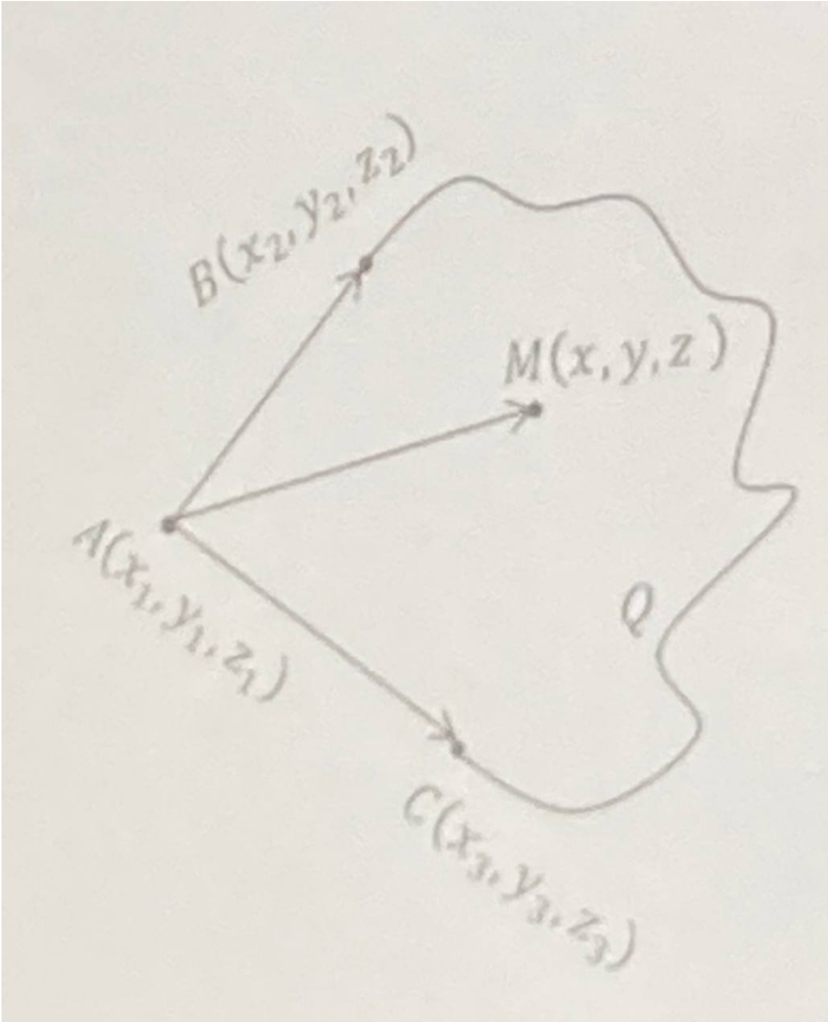
Из (10.1) $\Rightarrow \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1$

ПУсть $a = -\frac{D}{A}; \quad b = -\frac{D}{B}; \quad c = -\frac{D}{C}$, получим уравнение:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (10.3)$$

(10.3) - уравнение плоскости в отрезках

9 Уравнение плоскости, проходящей через три точки



$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (10.4)$$

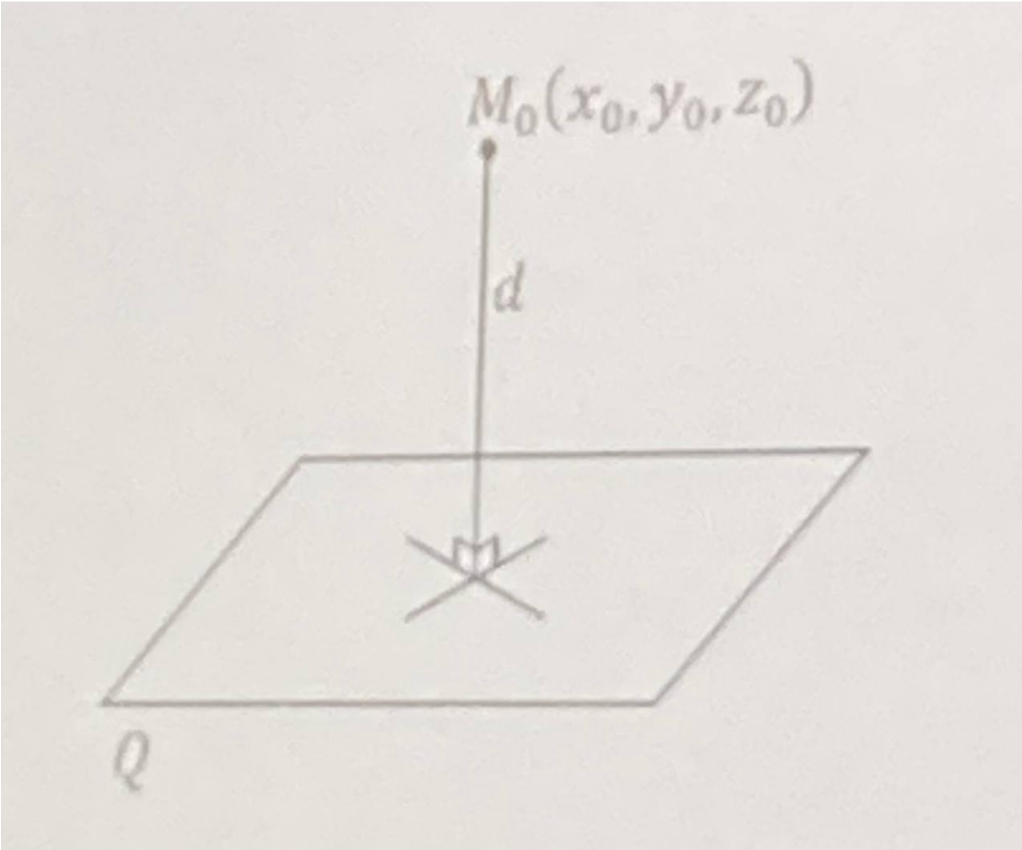
(10.4) - уравнение плоскости ABC

10 Нормальное уравнение плоскости

xcosα + ycosβ + zcosγ - p = 0 (1.5)

(10.5) - нормальное уравнение плоскости, где cosα, cosβ, cosγ - нарпавляющие косинусы нормлаьрного вектора, нарпвелнного из начала координат в сторонку плоскости, а p - рассстояние от рначала координат до плоскости.

11 Расстояние от точки до плоскости



Q: Ax + By + Cz + D = 0

d = $|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}|$

12 Угол между плоскостями

$Q_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$Q_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

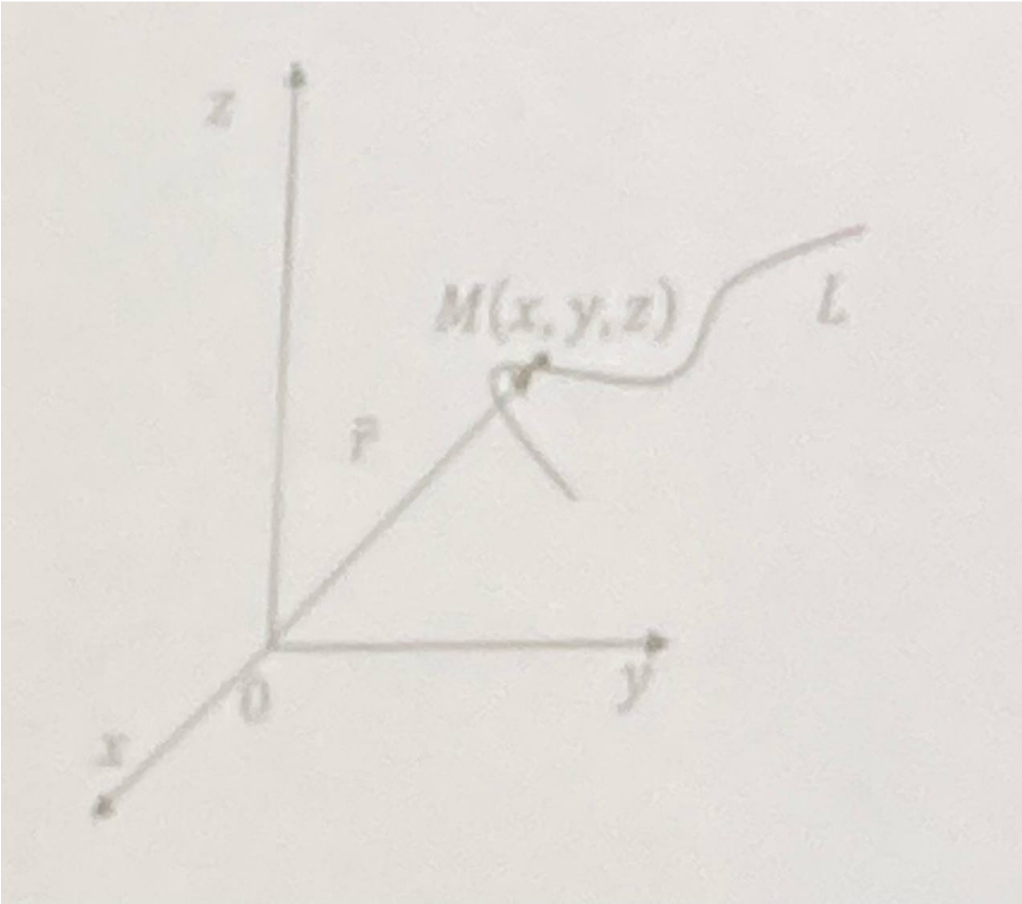
$\alpha = (\widehat{Q_1, Q_2})$

$\alpha = arccos|\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ - условие перпендикулярности

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ - условие параллельности

13 Уравнение линии в пространстве



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad\quad t \in [\alpha, \beta] \quad\quad (10.6) \\ z = z(t) \end{cases}$$

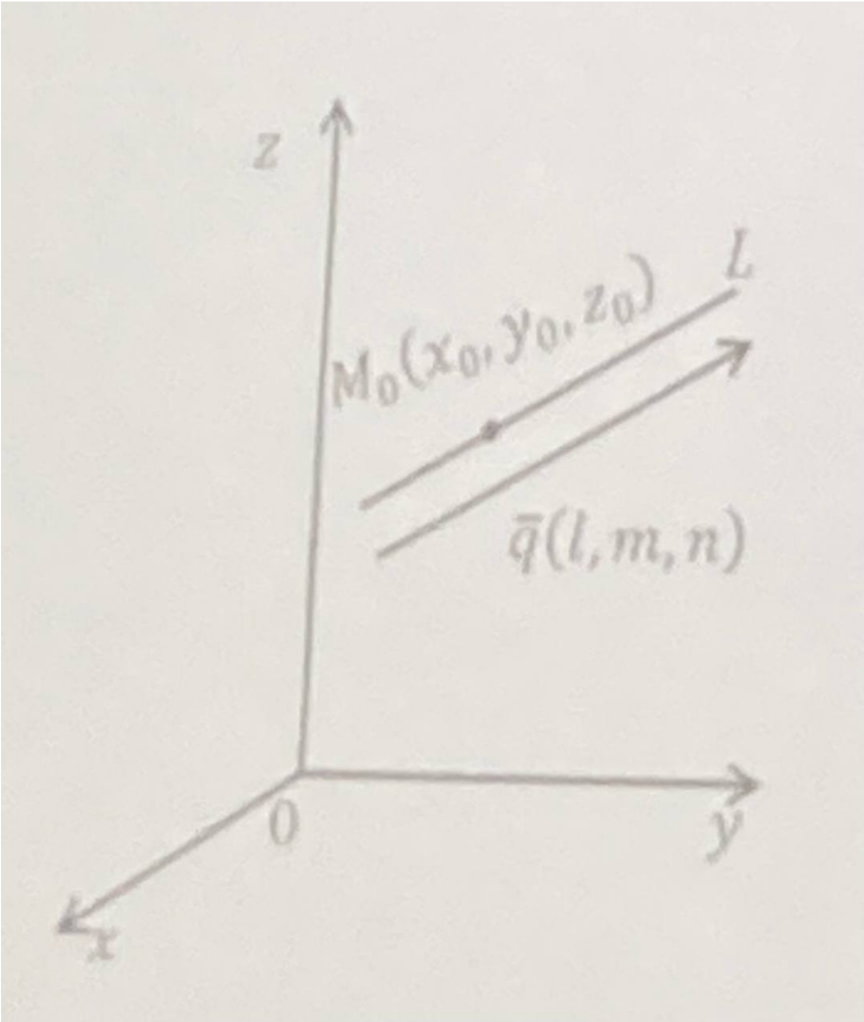
(10.6) - параметрическое уравнение линии в пространстве.

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ или $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (10.7)

(10.7) - векторное уравнение линии L

Функция $\vec{r}(t)$ называется вектор-функцией скалярного аргумента t.

14 Уравнение прямой в пространстве



$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ (10.8)

(10.8) - каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельное направляющему вектору $\vec{q}(l, m, n)$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (10.9)$$

(10.9) - параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (10.10)$$

(10.10) - уравнение прямой, как результат пересечения двух плоскостей

15 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$

$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$

1. $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} - \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$
2. $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$
3. $\alpha = (\widehat{L_1, L_2}) \quad \alpha = arccos|\frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{t_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{t_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}|$
4. Если $L_1 \nparallel L_2$, то L_1 и L_2 - пересекаются $\Leftrightarrow$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

5. L_1 и L_2 - скрещиваются $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

16 Взаимное расположение прямой и плоскости

$Q : Ax + By + Cz + D = 0 \quad L : \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$

$L \parallel Q \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0 \quad \vec{q} \perp \vec{n}$

$L \perp Q \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \quad \vec{q} \parallel \vec{n}$

$\phi = (\widehat{\vec{n}, \vec{q}})$

$\alpha = (\widehat{\vec{L}, \vec{Q}})$

$cos\phi = |\frac{(\vec{n},\vec{q})}{|\vec{n}||\vec{q}|} = cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = sin\alpha \Rightarrow \alpha = arcsin|\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{l^2+m^2+n^2}}|$

Пример: Составить уравнение плоскости ABC, если A(1;1;-1); B(2;0;1); C(-1;2;3)

Решение: $\vec{AB} 1; -1; 2 \ \vec{AC} -2; 1; 4$

$$|\vec{AB}, \vec{AC}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= -6\vec{i} - 8\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{n}(6; 8; 1)$

$6(x-1)+(8y-1)+1(z+1)=6x-6+8y-8+z+1=0$

$6x+8y+z-14=0$ - уравнение плоскости ABC

17 Обзор поверхностей второго порядка

Определение: Функция Φ(x,y,z) называется алгебраическим многочленом степени n, если Φ(x, y, z) есть сумма конечного числа членов вида: $A \cdot x^p \cdot y^q \cdot z^r$, где p + q + r ≤ n и существует по крайней мере одно слагаемое, у которого p + q + r = n

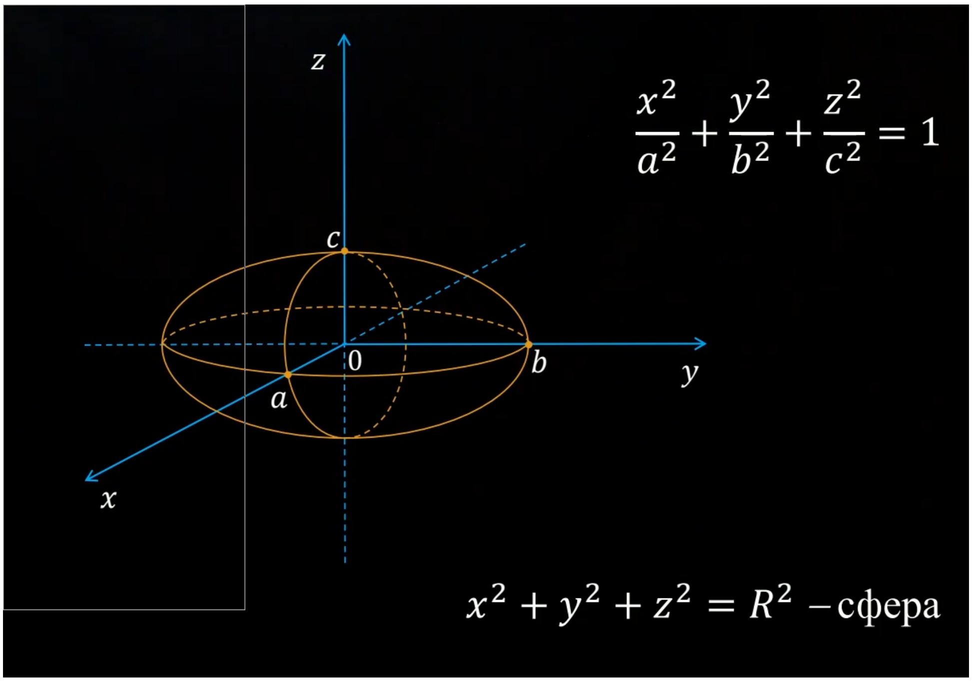
Определение: Поверхность, определяемая в некоторой декартовой системе координат алгебраическим многочленом n-ой степени, называется алгебраической поверхностью n-ого порядка

Пример: Ax + By + Cz + D = 0 - алгебраическая поверхность 1-го порядка

$\Phi(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0$ - алгебраическая поверхность 2-го порядка

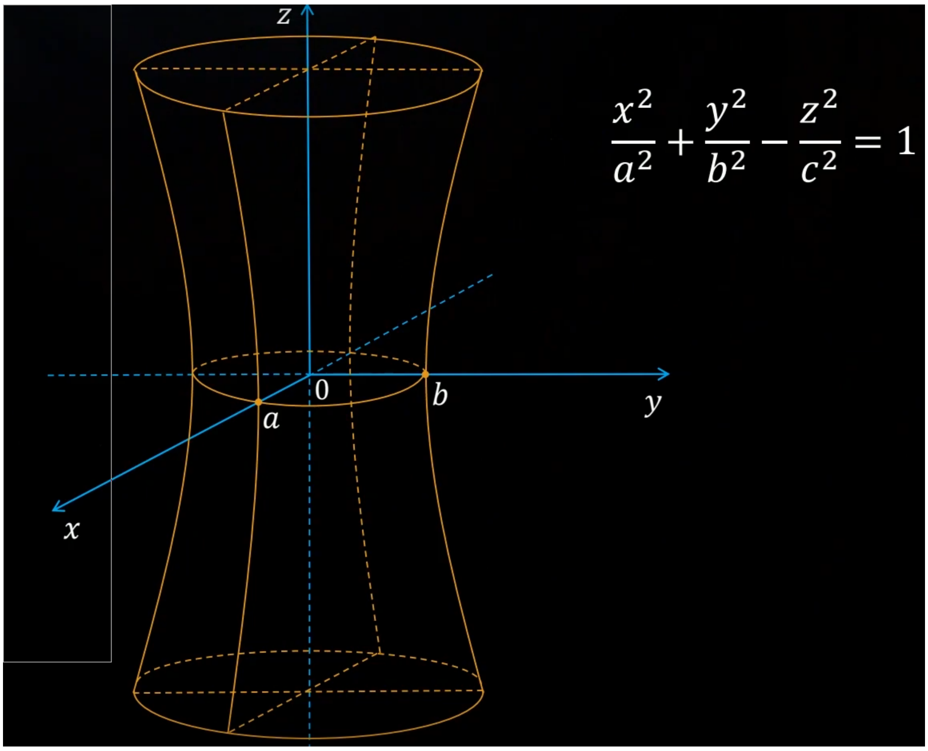
17.1 Эллипсоид

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



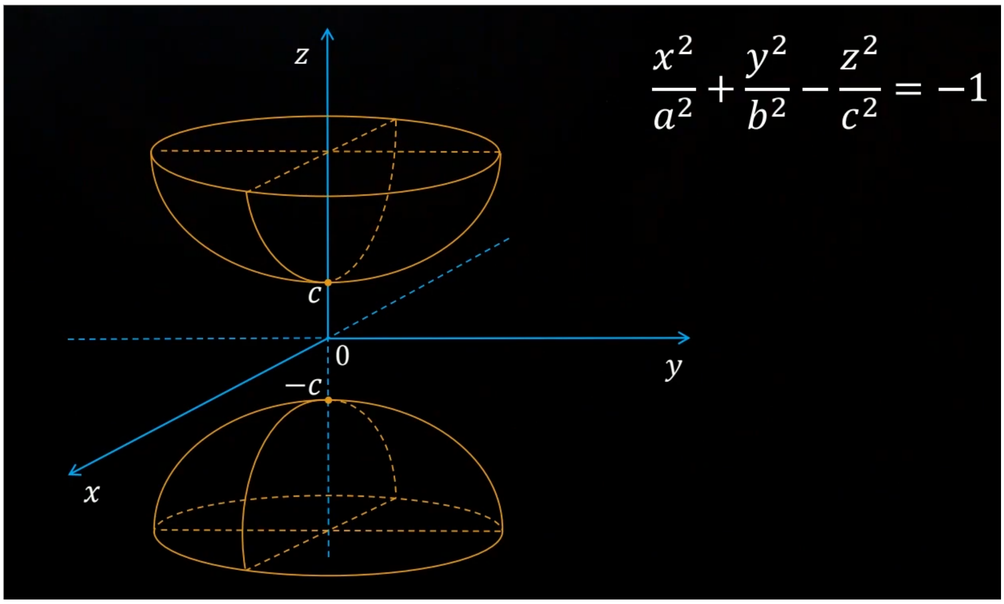
17.2 Однополостный гиперболоид

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



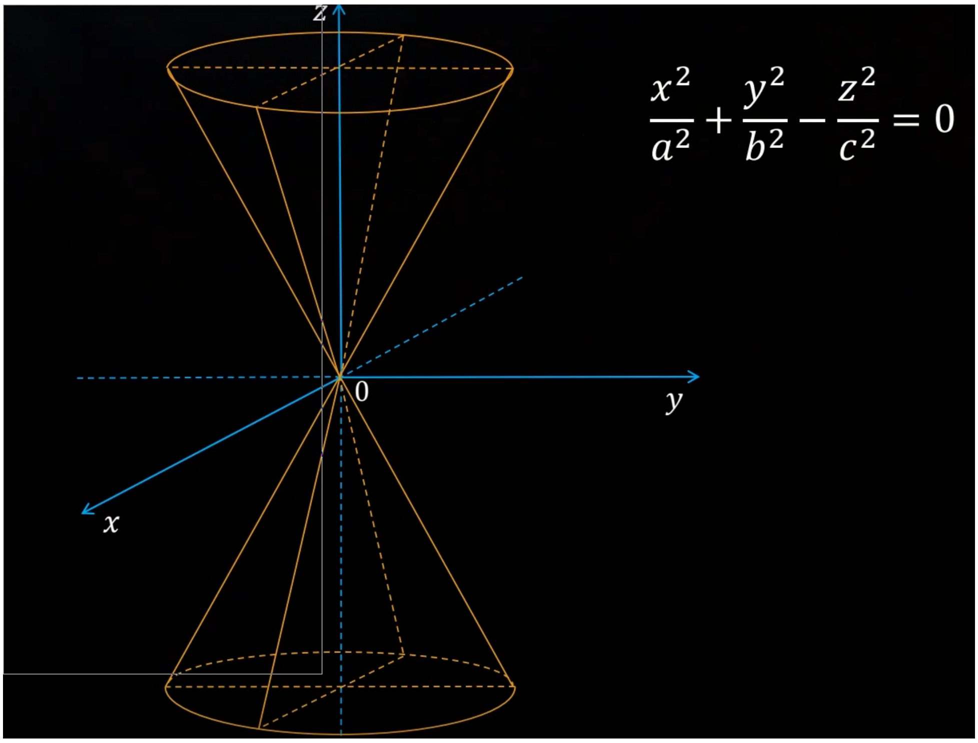
17.3 Двуполостный гиперболоид

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$



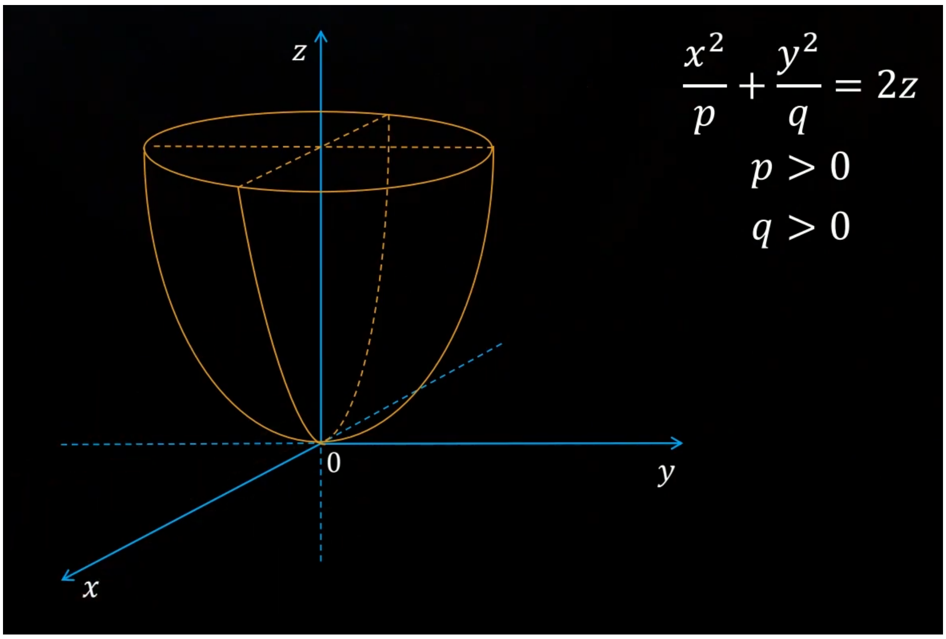
17.4 Конус

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$



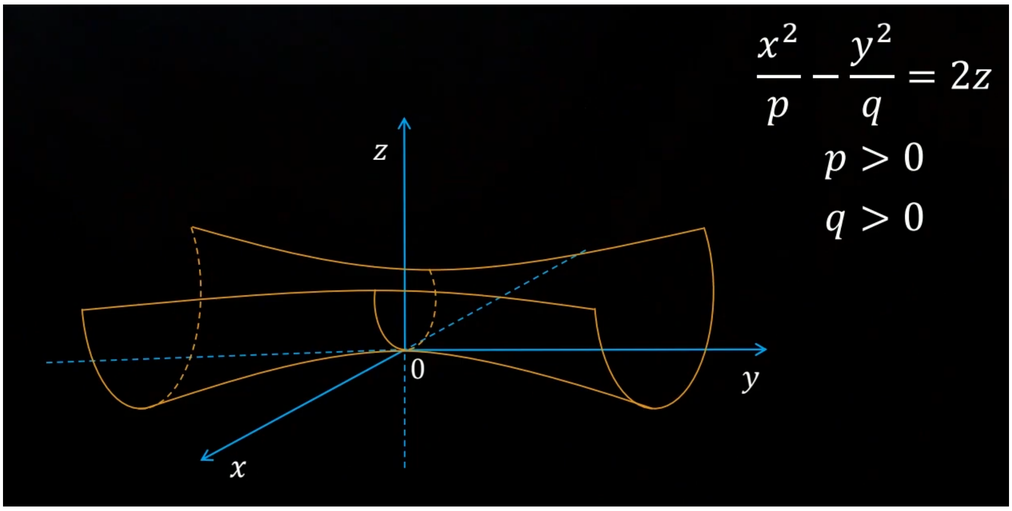
17.5 Эллиптический параболоид

$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, p > 0, q > 0



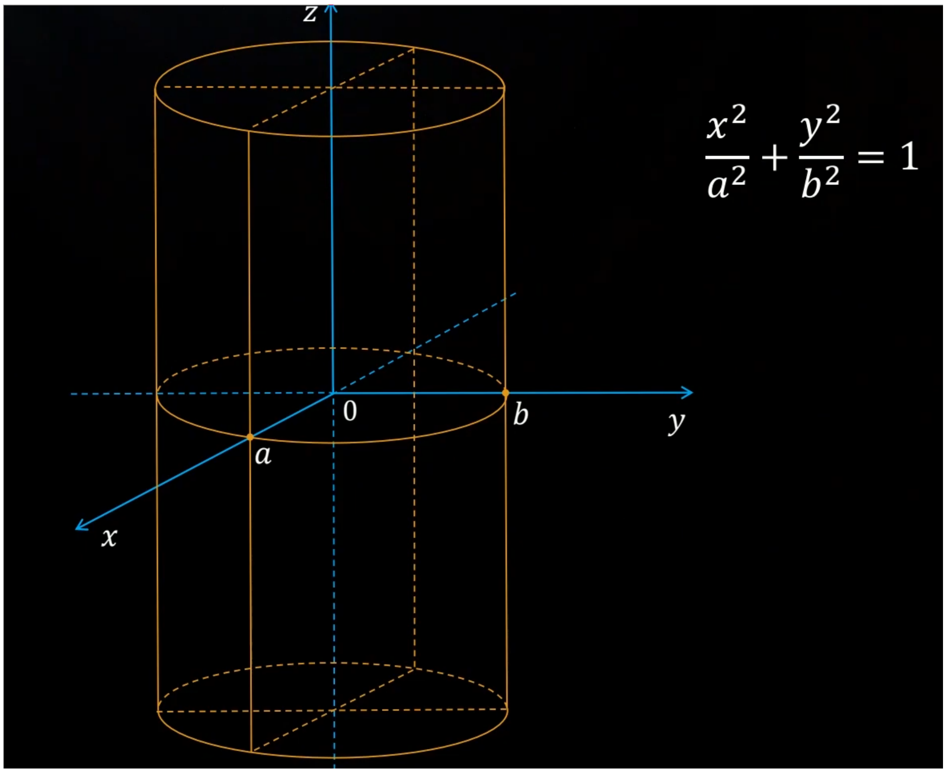
17.6 Гиперболический параболоид

$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$, p > 0, q > 0



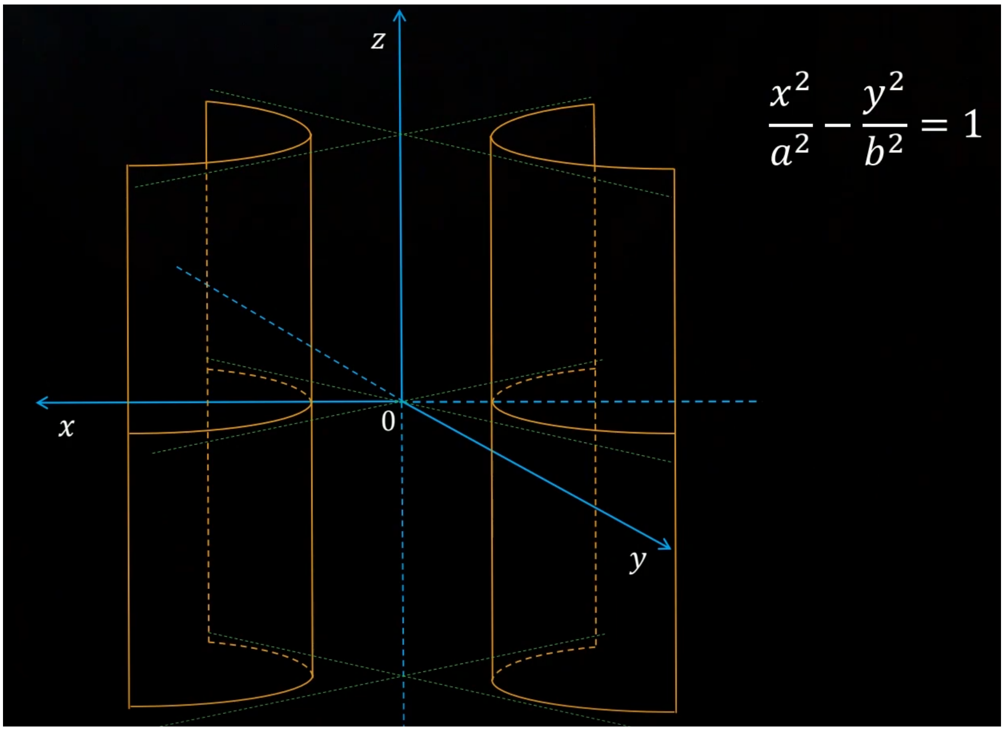
17.7 Эллиптический цилиндр

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



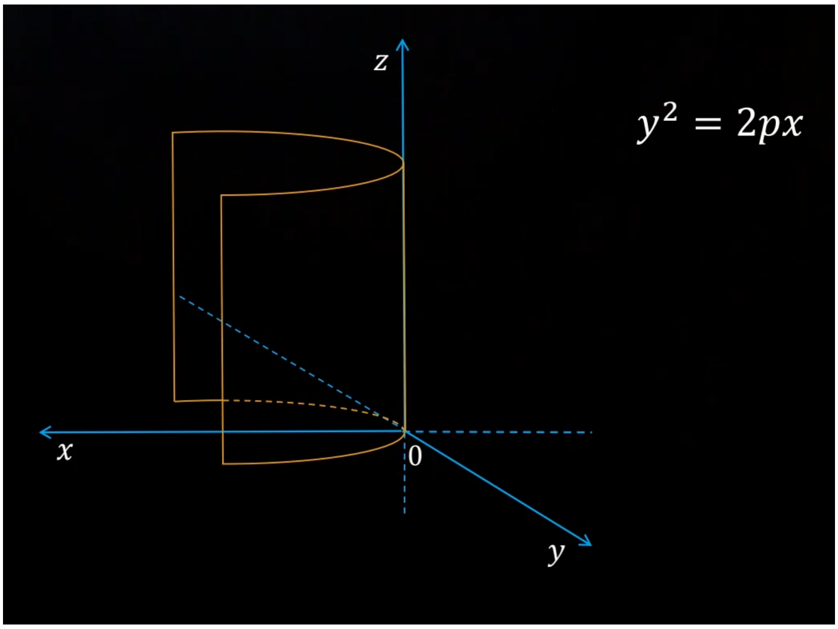
17.8 Гиперболический цилиндр

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



17.9 Параболический цилиндр

$y^2 = 2px$



Определение: Прямолинейной образующей поверхности называется прямая линия, целиком лежащая на данной поверхности.

Замечание: Поверхности под номерами 1, 3, 5 (Эллипсоид, Двуполостный гиперболоид, Эллиптический параболоид) прямолинейных образующих не имеют, а другие имеют.