1 Лекция 8

1.1 Нахождение собственных значений и собственных векторов

Пусть $\mathbb{A} : V \to V-$ линейный оператор и $\mathbb{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}-$базис в линейном пространстве V.
Пусть $\bar{x}$ - собственный вектор оператора $\mathbb{A}$ с собственным значением λ, то есть $\bar{x} \neq \bar{o}$ и $\mathbb{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}(8.6)$. Пусть A - матрица линейного оператора $\mathbb{A}$ в базисе $\mathbb{B}$.
Пусть

С фото... Нужно найти ненулевое решение системы (8.8). Система (8.8) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда:

$$rang(A - \lambda E) < n \Leftrightarrow \mid A - \lambda E \mid = 0(8.9)$$

Таким образом, для того, чтобы линейный оператор $\mathbb{A}$ имел собственный вектор $\bar{x}$ с собственным значением λ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство(8.9). Запишем равенство (8.9) подробнее:

$$\mid A - \lambda E \mid = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.10)$$

Определитель в равенстве (8.10) представляет собой многочлен степени n от λ. Его называют характеристическим многочленом, а равенство (8.10) называют характеристическим уравнением.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ - корни характеристического многочлена (8.10). В силу вышесказанного $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ - собственные значения линейного оператора $\mathbb{A}$

Правило нахождения собственных векторов и собственных значений линейного оператора

1. Находим собственные значения линейного оператора, то есть решаем характеристическое уравнение (8.10).

2. Для каждого собственного значения λ_i решаем однородную систему линейных уравнений:

$$(A - \lambda_i E) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (8.11)$$

   Любое ненулевое решение системы (8.11) - собственный вектор линейного оператора $\mathbb{A}$, соответствующий собственному значениюλ_i.

1.2 Инвариантность характеристического многочлена и определителя матрицы линейного оператора

Теорема. (Инвариантность характеристического многочлена и определителя матрицы линейного оператора)

Характеристический многочлен не меняется при переходе к другому базису. В любом базисе определитель матрицы линейного оператора имеет одно и то же значение.

Доказательство: Пусть $\mathbb{A} : V \to V$ -линейный оператор в линейном пространстве V. Пусть $\mathbb{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ и $\mathbb{B}' = (\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n)$ - базис в V.

Пусть A и A' -матрицы оператора $\mathbb{A}$ в базисах $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}'$ соответственно.
Тогда $A' = C^{-1}AC$, где C - матрица перехода от базиса $\mathbb{B}$ к базису $\mathbb{B}'$. $\Rightarrow |A'| = |C^{-1}| \cdot |A| \cdot |C| = |A|$, так как $|C^{-1}| \cdot |C| = 1 \Rightarrow |A'| = |A|$.
Далее в базисе $\mathbb{B}'$ имеем:
$|A' - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda E| = |C^{-1}AC - C^{-1}\lambda EC| = |C^{-1}(A - \lambda E)C| = |A - \lambda E|$ - характеристический многочлен в базисе $\mathbb{B}$

Определение. Две матрицы A и B называются подобными, если существует невырожденная матрица C такая, что $A = C^{-1}BC$ Обозначение $A \sim B$.

Следствие 1. Матрицы линейного оператора в различных базисах подобны.

Следствие 2. $A \sim A$, так как $A = E^{-1}AE$.

Следствие 3. Если $A \sim B$ и $B \sim D$, то $A \sim D$

2 Геометрический смысл определителя матрицы линейного оператора в пространстве геометрических векторов V^3. Билинейные функции и билинейные формы в линейном пространстве.

2.1 Геометрический смысл определителя матрицы линейного оператора в пространстве геометрических векторов V^3

Пусть $\mathbb{A} : V^3 \to V^3$ - линейный оператор. Пусть $\mathbb{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ - базис в V^3.

Пусть A - матрица оператора $\mathbb{A}$ в базисе $\mathbb{B}$.

Возьмем произвольные векторы:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \bar{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}; \bar{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix};$$

Возьмем образы этих векторов:

$$\mathbb{A}\bar{a} = \bar{a}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \mathbb{A}\bar{b} = \bar{b}' = \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}; \mathbb{A}\bar{c} = \bar{c}' = \begin{pmatrix} x_3' \\ y_3' \\ z_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix};$$

Эти три равенства можно записать одним матричным равенством:

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ z_1' & z_2' & z_3' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \qquad (9.1)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ z_1' & z_2' & z_3' \end{vmatrix} = |A| \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (9.2)$$

Вспоминая понятие смешанного произведения векторов, равенство (9.2) запишем в виде:

$$(\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}') = \mid A \mid \cdot (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})(9.3)$$

Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - не компланарны.

Тогда $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \neq 0. \Rightarrow |A| = \frac{(\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}')}{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} = \frac{\pm V'}{\pm V}$, то есть $\mid |A| \mid = \frac{V'}{V}$,
где V - объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$,
V' - объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'$,
$\mid |A| \mid$ - коэффициент искажения объемов.

Чем определяется знак $|A|$?
$|A| > 0$ - ориентация отображенной тройки векторов сохраняется.
$|A| < 0$ - ориентация отображенной тройки векторов меняется.
$|A| = 0$ - отображение вырождено.

2.2 Билинейные функции и билинейные формы в линейном пространстве

Определение. Билинейной функцией в линейном пространстве V называется функция $B(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}$ двух векторных аргументов $\bar{x} \in V$ и $\bar{y} \in V$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $B(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{y}) = B(\bar{x}_1, \bar{y}) + B(\bar{x}_2, \bar{y})$
2. $B(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \lambda B(\bar{x}, \bar{y})$
3. $B(\lambda\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{y}_2) = B(\bar{x}, \bar{y}_1) + B(\bar{x}, \bar{y}_2)$
4. $B(\bar{x}, \lambda\bar{y}) = \lambda B(\bar{x}, \bar{y})$

Таким образом, $B(\bar{x}, \bar{y}) : V \times V \to \mathbb{R}$.