МатАнал

Забродин Денис Александрович

31 декабря 2022 г.

Содержание

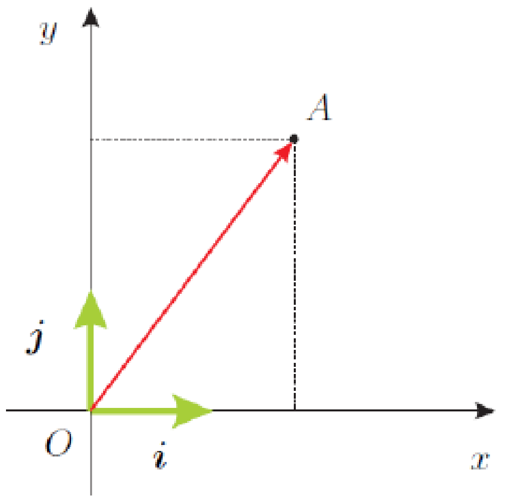
Система координат - объект, позволяющий описывать геометрический объект алгебраическими средствами.

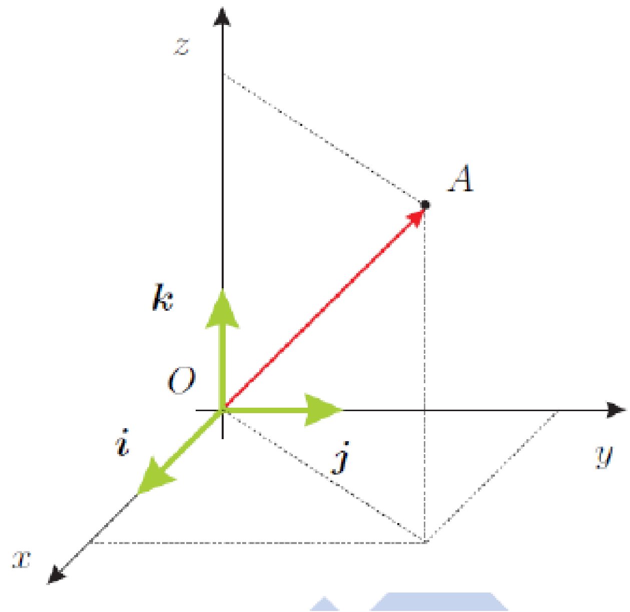
1 Декартова прямоугольная система координат

O - начало координат; i, j, k - единичные направляющие векторы координатных осей(орты); другое обозначение e_1, e_2, e_3

x - абсцисса, y - ордината, z - аппликата

$\vec{OA}$ - радиус-вектор точки A. Другое обозначение координат x_1, x_2, x_3

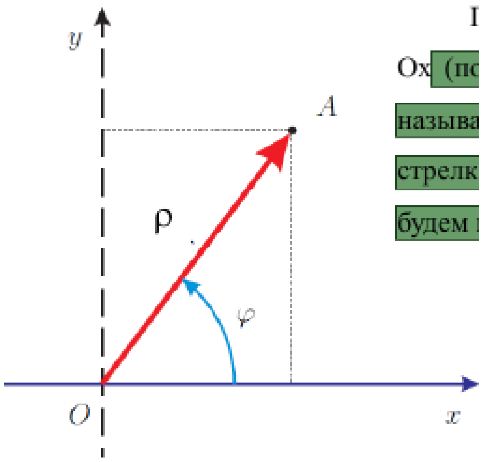




2 Полярная система координат

Полярная система координат на плоскости определяется заданием точки O (полюс), луча Ox (полярная ось) и единичного отрезка. Кроме того, должен быть указан поворот луча Ox, называемый положительным. Пусть это будет поворот в направлении против движения часовой стрелки. Повороты луча, совершаемые в направлении, противоположном положительному, будем называть отрицательными.

$0 \leq p < +\infty, \qquad 0 \leq \phi < 2\pi$



O - полюс

Ox - полярная ось

ϕ - полярный угол

2.1 Формулы перехода

$$\begin{cases} x = pcos\phi \\ y = psin\phi \end{cases} \quad \begin{cases} p = \sqrt{x^2 + y^2} \\ cos\phi = \frac{x}{p} \\ sin\phi = \frac{y}{p} \end{cases}$$

В любой системе координат уравнение, связывающее координаты, определяют некоторую линию на плоскости. Рассмотрим кривые, заданные уравнениями в полярных координатах: p = p(ϕ)

2.2 Уравнение окружности

Наиболее простым примером является уравнение окружности: $p = R = const \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2$

$(pcos\phi)^2 + (psin\phi)^2 = R^2 \Rightarrow p^2 = R^2 \Rightarrow p = R$

Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удаленных от точки O на расстояние R. Все такие точки удовлетворяют равенству p = R. При этом, если угол ϕ увеличивается, соответствую- щая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол ϕ уменьшается, соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

$p = 2cos\phi$

Тк p $\geq$ 0, то областью определения функции p(ϕ) является ϕ:

$-\pi 2 \leq \phi \leq \pi 2$

$p'(\phi) = -2sin\phi$

$p'(\phi) = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$

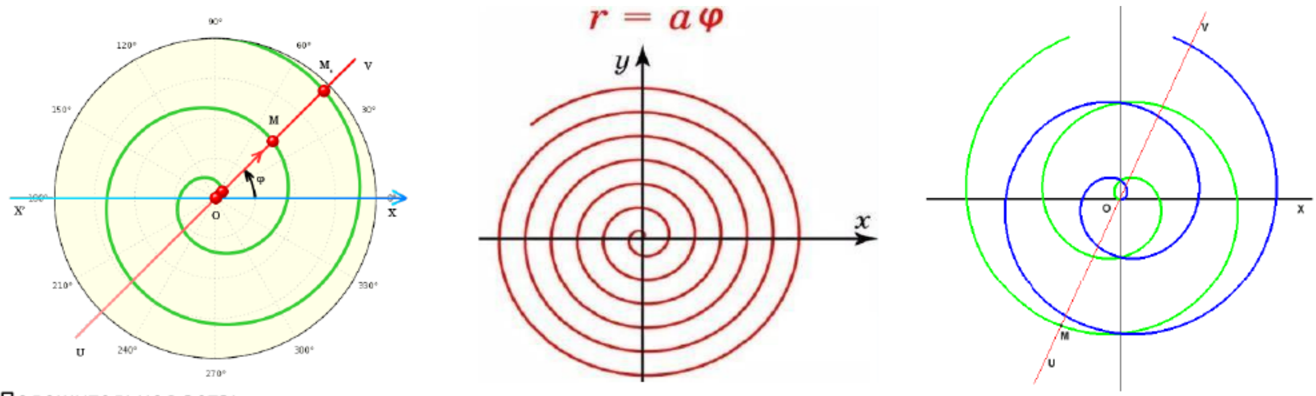
При $-\pi 2 < \phi < 0$ функция р(ϕ) растет от 0 до 2;

При $0 < \phi < \pi 2$ функция р(ϕ) убывает от 2 до 0

В декартовых координатах уравнение эой окружности примет вид: $p = 2cos\phi \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x$ или $(x-1)^2 + y^2 = 1$

2.3 Спираль Архимеда

$p(\phi) = \alpha\phi$, $\alpha > 0$: Это раскручивающаяся спираль с постоянной скоростью роста $p(\phi)$, тк $p'(\phi) = \alpha = const$. ϕ - любой угол от 0 до $+\infty$



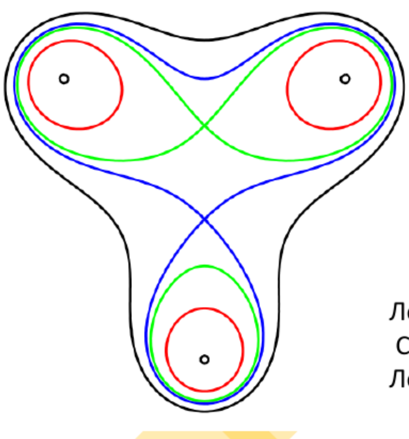
Положительная ветвь

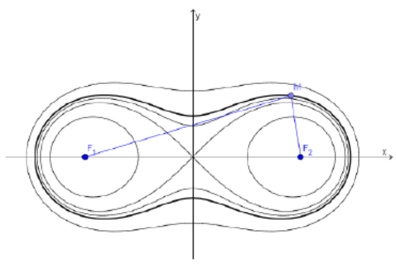
Отрицательная ветвь

Две ветви

2.4 Лемниската Бернулли

Лемниската с фокусами $F_1, F_2, ..., F_n$ - кривая на плоскости, обладающая тем свойством, что для $\forall$ точки этой кривой произведение расстояний до фокусов = const





Лемнискаты с двумя фокусами наз. овалами Кассини.
Среди них наибольший интерес представляет
Лемниската Бернулли

Лемниската Бернулли – это кривая, у которой для каждой точки произведение расстояний до фокусов равно квадрату половины расстояния между ними

$$|F_1M| \cdot |F_2M| = (\frac{|F_1F_2|}{2})^2$$

В Декартовой системе координат уравнение 4-й степени:

$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2(x^2 - y^2)$

В полярных координатах:

$x^2 + y^2 = p^2, \;\; p^4 = 2a^2(p^2cos^2\phi - p^2sin^2\phi) \Rightarrow p^2 = 2a^2cos2\phi$

Функция $p^2 = 2a^2cos2\phi$ - периодическая, с периодом π Она определена, если $\cos 2\phi \geq 0$:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq 2\phi \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{5\pi}{4}$

В силу периодичности и четности её график симметричен относительно лучей $\phi = 0$, $\phi = \pi$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{3\pi}{2}$

$2pp' = -2sin2\phi;\; p' = \frac{sin2\phi}{\sqrt{2cos2\phi}} \Rightarrow sgn(p') = sgn(sin2\phi)$

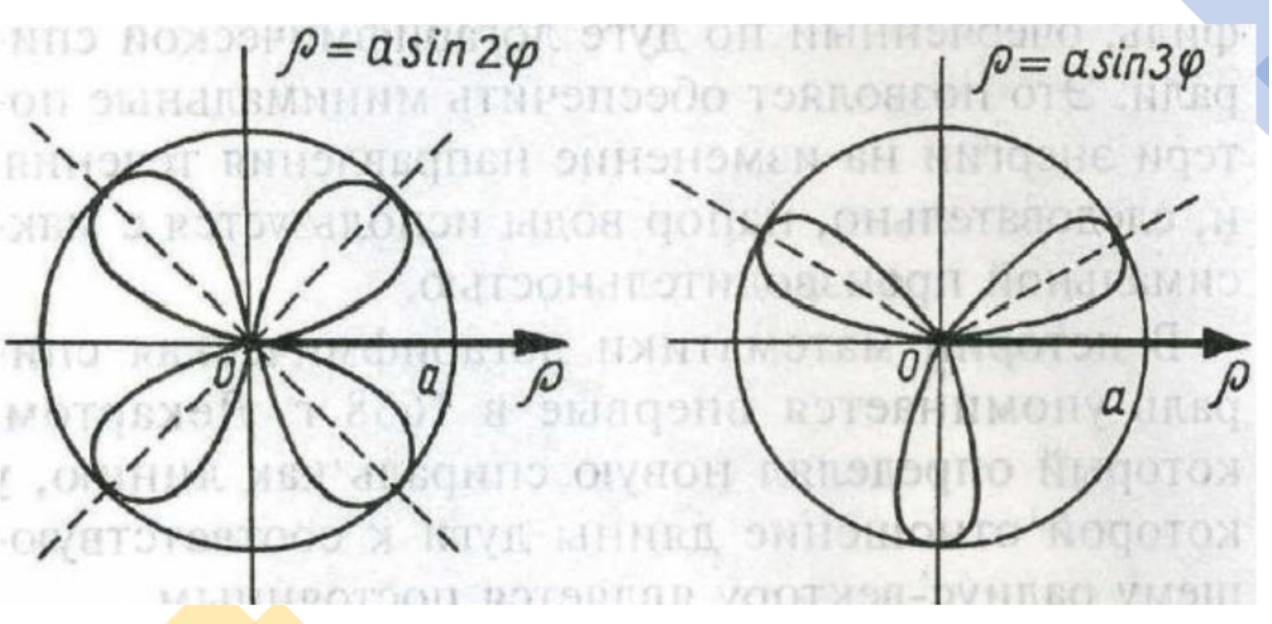
2.5 Семейство роз Гранди

$p = asink\phi, p = acosk\phi$

Функция $\sin k\phi$ - ограниченная:

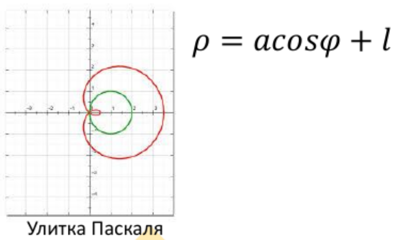
$|sink\phi| \leq 1 \Rightarrow p = asink\phi$ также ограничена $0 \leq p \leq a \Rightarrow$ вся кривая будет располагаться внутри круга радиуса а.

В силу периодичности тригонометрических функций роза состоит из одинаковых лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен а.



2.6 Кардиоида

$p = a(1 \pm cos\phi)$ или $p = a(1 \pm sin\phi)$



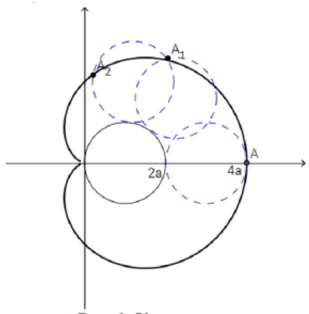


Рис. 9. Кардиоида

2.7 Гиперболическая спираль

$p = \frac{\alpha}{\phi}$

Кривая состоит из 2-х ветвей, симметричных относительно оси Оу - одна ветвь получается при $\phi > 0$, вторая - при $\phi < 0$. Гиперболическая спираль имеет асимптоту y = a и асимптотическую точку - полюс

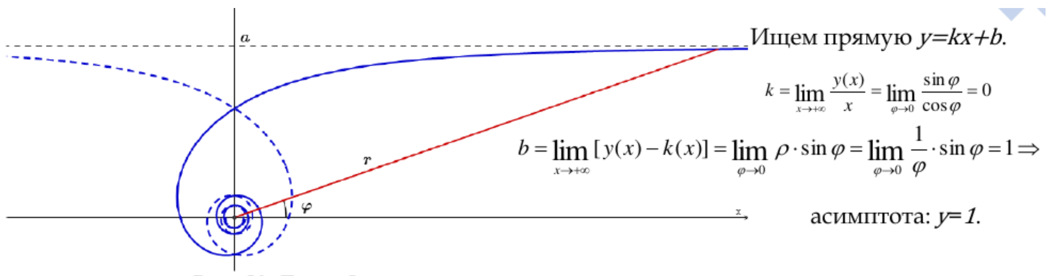


Рис. 53. Гиперболическая спираль.

2.8 Логарифмическая спираль

$r = \alpha^{\phi}$ или $\log_a r = \phi$ $\alpha > 0$

Характеристическое свойство: логарифмическая спираль - это кривая, пересекающая все лучи, выходящие из полюса т.О под некоторым постоянным углом α - см. Рис.50. Радиус-векторы последовательных точек спирали, находящихся на одном и том же полярном луче φ, образуют геометрическую прогрессию.

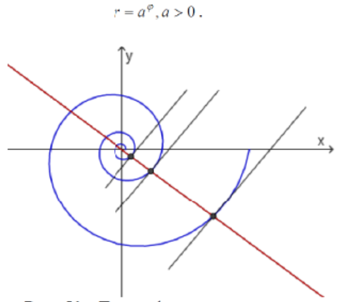


Рис. 50. Логарифмическая спираль.

3 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

3.1 Множества в n-мерном пространстве

Определение: Пространством R^n называется множество наборов, состоящих из n действительных чисел $R^n = (x_1, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n$

$x \in \mathbb{R}^{\nVdash}$ (множеству действительных чисел; числовой прямой)

При n = 2 пространство R^2 - это плоскость

При n = 3 пространство R^3 - это трехмерное пространство

В множестве R^n введем понятие расстояние между двумя его элементами $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

Определение: Расстояние между элементами x и y, принадлежащими множеству R^n, называется

$$r(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_1)^2}$$

Тогда для R^1, очевидно: r(x,y) = |x-y|

Для R^2: r(x,y) = $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

Для R^3: r(x,y) = $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$

Множество R^n с введенными в нем расстоянием называют пространством R^n. n - размерность этого пространства

$$dimR^n = n$$

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - точка пространства $\mathbb{R}^n$

$x_i (i = 1, ..., n)$ - i координата точки x

$0(0, ..., 0)$ - начало координат в $\mathbb{R}^n$

$x(0, 0, ..., x_i, ..., 0)$ - i координатная ось

Рассмотрим множество E $\subset R^n$. Пусть точка P принадлежит множеству E: P $\in$ E.

Определение: ε - окрестность точки $P_0 \in E$ называется множество точке $P \in E$, отстоящих от P_0 на расстояние $r(P_0, P)$, меньшее, чем ε: $U(P_0, \varepsilon) = P : r(P_0, P) < e$

По другому ε - окрестность называют n - мнерным шаром радиуса ε и с центром в точке P_0

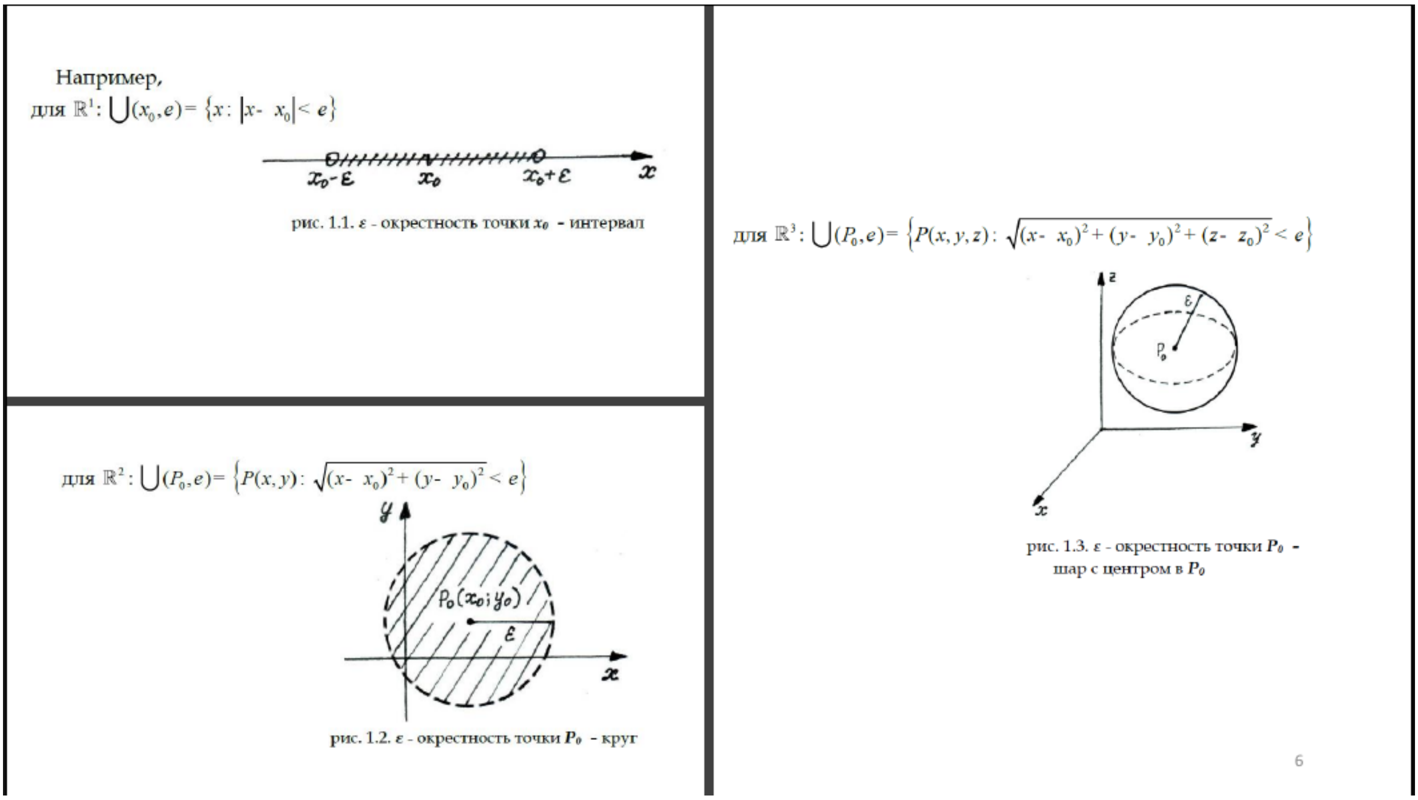


рис. 1.1. ε - окрестность точки x_0 - интервал

рис. 1.2. ε - окрестность точки P_0 - круг

рис. 1.3. ε - окрестность точки P_0 - шар с центром в P_0

Точка P_0 называется внутренней точкой множества E, если $U(P_0, \varepsilon) \in E$, те точка входит в E вместе с некоторой своей окрестностью

Множество, каждая точка которого является его внутренней точкой, называют открытым в R^n множеством

Точка P_0 называется граничной точкой множества $E \subset R^n$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку, принадлежащую множеству E и хотя бы одну точку, не принадлежащую множеству E. Множество всех граничных точек множества E называют границей и обозначают $_E$ или δE

Множества, содержащие свои границы, будет называть замкнутыми, а не содержащию свои границы - открытыми

Множество E $\subset R^n$, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей этому множеству, называют связным

Множество $E \subset R^n$ называют областью в пространстве R^n, если E - открытое в R^n, связное множество

Если E - область, то $EU\delta E = \bar{E}$ - замкнутая область, называемая замыканием E

Множество называется ограниченным, если существует n - мерный шар, содержащий это множество.

3.2 Понятие функции многих переменных

Область определения

Функцией от n переменных $z = f(x_1, ..., x_n)$ называется отображение некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ n-мерного арифметического пространства в действильную прямую $\mathbb{R}$. Или в более традиционных терминах: функция от n переменных - это правило, по которому точкам $M(x_1, ..., x_n) \in D$ сопоставляются числа $f(x_1, ..., x_n)$. Множество D называется областью определения функции f.

Областью определения функции может служить как замкнутая, так и открытая область, как конечная (ограниченная), так и бесконечная

3.3 График функции двух переменных и ее линии уровня

График функции f - это множество в трехмерном пространстве, состоящее из точке $(x, y, f(x, y)) \in R^3 | (x, y) \in D$

Линия уровня функции f - это множество точек (x,y) плоскости, удовлетворяющих уравнению f(x,y) = c, где c - константа. Линия уровня является проекцией на плоскость XOY линии пересечения графика z = f(x,y) с горизонтальной плоскостью z = c

3.4 Пределы и непрерывность

Пусть функция z = f(x,y) = f(P) определена в некоторой окрестности точки P_0 за исключением, быть может, самой точки P_0

Определение: Число A называется пределом функции z = f(P) при P $\to P_0$, если при любом пути стремления P к P_0 выполняется следующее:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall P,\ \rho(P_0, P) < \delta \Rightarrow |f(P) - A| < \varepsilon$$

Для функций нескольких переменных справедливы те же теоремы об алгебраических свойствах пределов, что и для функций одной переменной

Пусть теперь функция z = f(x, y) = f(P) определена в некоторой окрестности точки P_0 и в самой точке P_0

Определение: Функция z = f(x,y) = f(P) непрерывна в точке $P_0(x_0, y_0)$, если существует $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$

Введем понятие приращения для функции двух переменных.

Пусть $P_0(x_0, y_0)$, а $P(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$, те $\rho(P, P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

Тогда полное приращение функции: $\Delta z = f(P) - f(P_0)$

При P $\to P_0$ следует, что $\rho(P, P_0) \to 0$ и определение непрерывной функции можно записать с помощью приращения: Функция z = f(x,y) непрерывна в точке P_0, если $\lim\limits_{\rho\to 0} \Delta z = 0$

Точки, в которых функция не является непрерывной, называются точками разрыва. В случае функций нескольких переменных точки разрыва могут составлять целые кривые, поверхности и тд

Определение: Функция, непрерывная в любой точке ограниченной замкнутой области $\bar{D}$, называется непрерывной в $\bar{D}$

Сформулируем теоремы о свойствах функции, непрерывной в ограниченной замкнутой области $\bar{D}$, аналогичные рассмотренным ранее для функции одной переменной

Теорема 1: Если функция f(P) непрерывна в $\bar{D}$, то она ограничена в $\bar{D}$, те $\exists C > 0 : \forall P \in \bar{D} \Rightarrow |f(P)| < C$

Теорема 2: Если функция f(P) непрерывна в $\bar{D}$, то она хотя бы в одной точке $\bar{D}$ достигает своего наименьшего значения m, и хотя бы в одной точке $\bar{D}$ - своего наибольшего значения M, те $\exists P_1, P_2 \in \bar{D}$, что $f(P_1) = max_{\bar{D}} f(P) = M$ и $f(P_2) = min_{\bar{D}} f(P) = m$

Теорема 3: Если функция f(P) непрерывна в $\bar{D}$, то она принимает все промежуточные значения, лежащие между M и m, те $\forall k: \quad m \leq k \leq M \quad \exists P_0 \in \bar{D}: f(P_0) = k$

3.5 Дифференцируемость функции многих переменных

Пусть задана функция z = f(x,y), определенная на множестве D $\subset R^2$ и принимающая действительные значения. Точка (x_0, y_0) является внутренней точкой области определения

Определение: Частная производная функции z = f(x,y) по переменной x в точке (x_0, y_0) обозначается одним из следующих символов $\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$ и тд и вычисляется по формуле:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

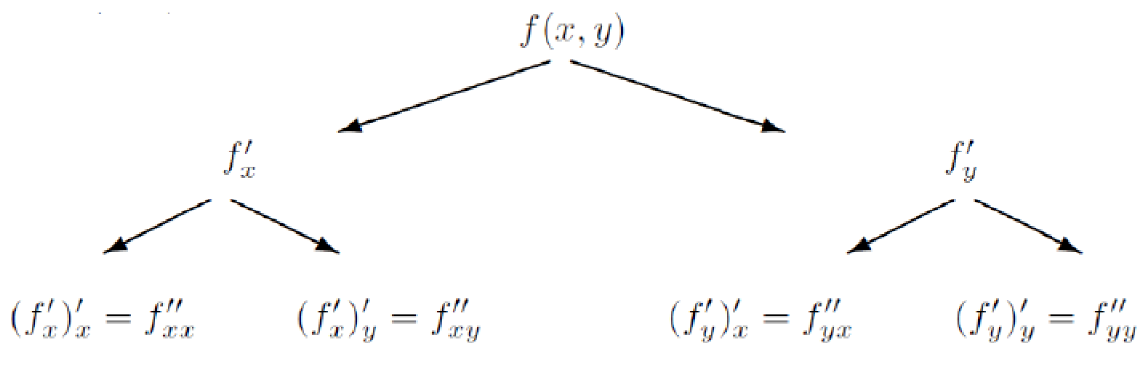
Аналогично, частная производная функции z = f(x,y) по переменной y в точке (x_0, y_0) вычисляется по формуле

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Из определения следует, что частные производные находятся по тем же правилам, что и обычные производные, только лишь при этом учитывается, что при отыскании $\frac{\delta z}{\delta x}$ фиксированной остается переменная y, а для $\frac{\delta z}{\delta y}$ - переменная x.

3.6 Частные производные высших порядков

Частные производные второго порядка получаются в результате двух последовательных дифференцирований. Для функции z = f(x,y) можно образовать 4 производные второго порядка:



Производные f''_{xy} и f''_{yx} называются смешанными производными второго порядка f''_{xx} и f''_{yy} - частыми производными второго порядка (иногда - чистыми)

Заметим, что $f''_{xy} = f''_{yx}$. Для большинства функций (причем подавляющего большинства) это равенство справедливо. Более того, до определенного времени считалось, что оно выполняется всегда. Но это не так!

Пример Шварца:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\delta^2 f(0,0)}{\delta x \delta y} = -1 \neq 1 = \frac{\delta^2 f(0,0)}{\delta y \delta x}$$

Теорема Шварца: Если функция z = f(x,y) и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $P_0(x_0, y_0)$ и в некоторой е окрестности, то $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

те производные не зависят от порядка дифференцирования

4 Дифференцируемость функций нескольких переменных

Мы исследуем поведение функции z = f(x,y) в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$

$\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0$ - приращения аргументов

Определение: Функция z = f(p) называется дифференцируемой в точке, если её полное приращение можно представить в виде

$\Delta z = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\delta y + \varepsilon_1(\Delta y, \Delta x)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$, где $A(x_0, y_0)$, $B(x_0, y_0)$ не зависят от Δx и Δy

а при ε_1 и $\varepsilon_2 \to 0$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$

Первые два слагаемые в Δz называются дифференциалом функции $dz = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y$

Полным дифференциалом функции z = f(x,y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x,y): $dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$

Формула $\Delta z = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta y, \Delta x)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$ показывает, что как и в случае одной переменной верна

Теорема: Если f(x,y) - дифференцируема, то она непрерывна. Обратная теорема не верна.

Теорема (необходимые условия дифференцируемости)

Если функция z = f x, y дифференцируема в точке (x, y), то у нее существуют в этой точке обе частные производные, причем $A(x,y) = \frac{\delta z}{\delta x}, \quad B(x,y) = \frac{\delta z}{\delta y}$

Доказательство: Запишем полное приращение дифференцируемой функции: $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$

Эта формула справедлива при $\forall$ приращениях Δ x и Δ y

В частности, при Δ y = 0 полное приращение Δ z становится частным приращением по x: $\Delta_x z = A\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$

Разделим на Δ x и перейдем к пределу при Δ x $\to$ 0:

$\frac{\delta z}{\delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$

Аналогично по y: $\Delta_y z = A\Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$:

$\frac{\delta z}{\delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = B$

Если теперь за дифференциалы независимых переменных принять их приращения, те положить $\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy$, то получится следующая формула дифференциала:

$$dz = \frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, ..., t) = \frac{\delta f}{\delta x} dx + \frac{df}{dy} dy + ... + \frac{\delta f}{\delta t} dt$$

Замечание: Существование частных производных не является (в отличие от случая функций одной переменной) достаточным условием дифференцируемости, те функция нескольких переменных может иметь частные производные, но при этом не быть дифференцируемой.

Привести пример функции, имеющей частные производные, но при этом не дифференцируемой

$$z = \begin{cases} \frac{x_2 y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

У этой функции имеются частные производные в точке $M_0(0, 0)$

$f(x, 0) \equiv 0, f(0, y) \equiv 0 \Rightarrow f'_x(M_0) = 0, f'_y(M_0) = 0$

Однако эта функция не является дифференцируемой в точке (0,0)

Предположим противное $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$

$\Delta z = \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - 0 = 0\Delta x + 0\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ Положим Δx = Δy

Получим $\frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta x = \alpha \Delta x \Rightarrow \frac{1}{2} = \alpha$

Теорема(Достаточное условие дифференцируемости): Если у функции z = f(x,y) = f(p), определенной в окрестности точки p_0, существуют обе частные производные, которые в точке p_0 непрерывны, то функция в этой точке дифференцируема

4.1 Дифференцирование сложных функций

Пусть z = f(x,y), где

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

функции f(x,y), ϕ(t), ψ(t) дифференцируемы

Тогда производная сложной функции $z = f[\phi(t), \psi(t)]$ $\quad \frac{dz}{dt} = \frac{\delta z}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dt}$

Если z = f(x,y), где y = ϕ(x) $\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\delta z}{\delta x} + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx}$

z = f(x,y), где

$$\begin{cases} x = \phi(u; v) \\ y = \psi(u; v) \end{cases}$$

$\frac{\delta z}{\delta u} = \frac{\delta z}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta u} + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta u}$

$\frac{\delta z}{\delta v} = \frac{\delta z}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta v} + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta v}$

4.2 Дифференцирование функций, заданных неявно

Мы уже накомы с понятием неявной функции одной переменной. Неявная функция y = y(x) определяется уравнением F(x,y) = 0

Пусть

1. функция F(x,y) и ее частные производные F'_x и F'_y непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$
2. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

В этом случае функция y = f(x) имеет непрерывную производную в окрестности точки x_0, которую можно найти по формуле $y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

Поскольку y = y(x) есть решение уравнения F(x,y) = 0, то имеем тождество F(x,y(x)) $\equiv$ 0

Дифференцируем $F'_x \cdot 1 + F'_y \cdot y' = 0$

$y' = -\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{\frac{\delta F}{\delta y}}$ при условии $\frac{\delta F}{\delta y} \neq 0$

4.3 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательная плоскость к графику S дифференцируемой функции z = f(x,y) в точке $M(x_0, y_0)$ (более точно: в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$) задается уравнением

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Замечание: В какой либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе

Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности

Пусть поверхность задана уравнением z = f(x,y) запишем ее в неявном виде F(x,y,z) = 0, где F(x,y,z) - функция, дифференцируемая в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке: $\frac{x - x_0}{(\frac{\delta F}{\delta x})_{N_0}} = \frac{y - y_0}{(\frac{\delta F}{\delta y})_{N_0}} = \frac{z - z_0}{(\frac{\delta F}{\delta z})_{N_0}}$

4.4 Экстремум функции нескольких переменных

Если для функции z = f(x,y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$, то точка M_0 называется точкой максимума

Если для функции z = f(x,y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, то точка M_0 называется точкой минимума

Теорема (необходимые условия экстремума)

Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует

Эту точку (x_0, y_0) будем называть критической точкой

Критические точки функции z = f(x,y) находятся из системы: $f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0$

Необходимое условие экстремума в теореме не является достаточным, те точка может быть критической, но не быть точкой экстремума.

Гессианом функции f(x,y) называется функция H(x,y), которая является функциональным определителем, составленным из вторых частных производных:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{y^2}(x,y) \end{vmatrix}$$

Теорема (достаточные условифя экстремума функции двух переменных)

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x,y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение: $D(x,y) = A \cdot C - B^2$, где $A = f''_{x^2}(x,y)$, $C = f''_{y^2}(x,y)$, $B = [f''_{xy}(x,y)]^2$

1. Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x,y) имеет экстремум, если A<0 - максимум, если A > 0 - минимум
2. Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x,y) не имеет экстремума
3. Если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя, необходимы дополнительные исследования

5 Дифференциалы высших порядков

$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)$

$d^2z = d[f'_x(x,y)dxf'_y(x,y)dy] = f''_{x^2}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}(x,y)(dy)^2$

$d^3z = f'''_{x^3}(dx)^3 + 3f'''_{x^2y}(x,y)(dx)^2dy + 3f'''_{xy^2}(x,y)dx(dy)^2 + f'''_{y^3}(x,y)(dy)^3$

$d^nz = (\frac{\delta}{\delta x}dx + \frac{\delta}{\delta y}dy)^n f(x,y)$

6 Некоторые сведения о квадратичных формах

Определение: Функция вида

$Q(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + ... + a_{nn}x_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$

Называется квадратичной формой от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, числа a_{ij} называются коэффициентами квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей квадратичной формы

Если $a_{ij} = a_{ji}$ для $\forall i; j \quad i \neq j$, то квадратичная форма называется симметричной

Определение: Определитель

$\Delta_1 = a_{11}$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Называются главными минорами матрицы А

Определение 4: Квадратичная форма $Q(x_1; ...; x_n)$ называется положительно определенной (отрицательно определенной), если для бюбых значений переменных $x_1, ..., x_n$ одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения

Теорема (критерий Сильвестра)

1. Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1; ...; x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны

2. Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1; ...; x_n)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались следующим образом: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, ...$

Теорема 3(достаточные условия существования локального экстремума)

Пусть функция $u = f(x_1; ...; x_n) =$ f(P) дифференцируема в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0; ...; x_n^0)$ и дважды дифференцируема в самой точке P_0, причем P_0 - точка возможного экстремума, те $du(P_0) = 0$.

Тогда

1. Если второй дифференциал $d^2u(P_0)$ является положительно определенной (отрицательно определенной) формой от переменных $dx_1, ..., dx_n$, то функция u = f(P) имеем в точке P_0 локальный минимума (максимум)

2. Если $d^2u(P_0)$ является знакопеременной квадратичной формой, то функция u = f(P) в точке P_0 экстремума не имеет