Комплексные числа

Забродин Денис Александрович

15 февраля 2023 г.

Содержание

1 Комплексные числа

Определение: Комплексными числами называется множество выражений вида z = x + iy, где x, y $\in \mathbb{R}$, а i - мнимая единица, удовлетворяет условию $i^2 = -1$, с введенными в нем операциями сложения и умножения:

$z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны т и тт, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$

x - действительная часть комплексного числа z

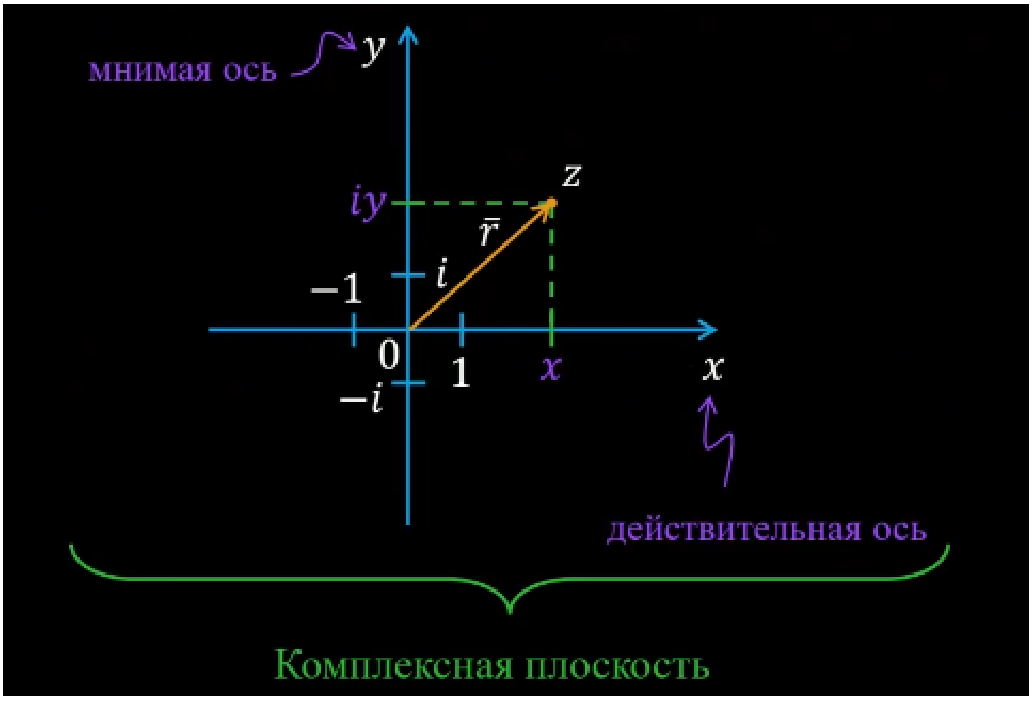
y - мнимая часть комплексного числа z

Обозначение: x = Rez; y = Imz

$z = x + iy$ - алгебраическая форма комплексного числа

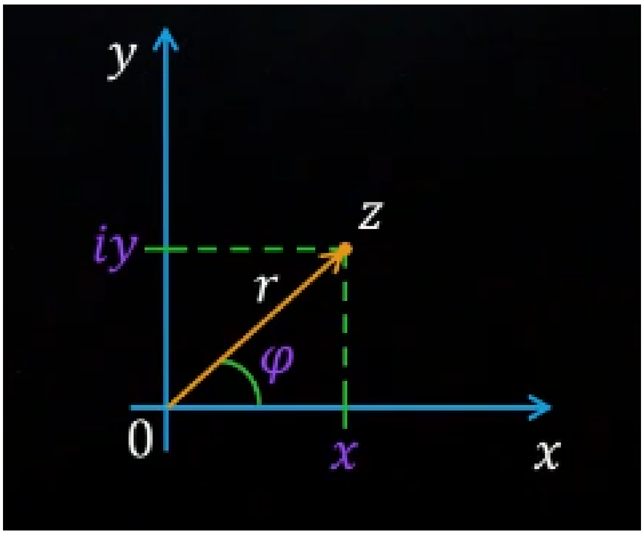
1.1 Геометрическое изображение комплексных чисел

Пусть на плоскости задана декартова система координат Oxy. Сопоставим комплексному числу z = x + iy точку M(x, y)



Замечание: Тк геометрически изображать комплексное число можно не только точкой, но и вектором, то и сложение, вычитание, а также умножение комплексного числа на действительное число можно выполнять аналогично тому, как это осуществляется для геометрических векторов.

1.2 Тригонометрическая форма комплексного числа



$$z = x + iy \qquad \begin{cases} x = rcos\phi \\ y = rsin\phi \end{cases}$$

$z = r(cos\phi + isin\phi)$ - тригонометрическая форма комплексного числа

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа

$\phi = argz$ - аргумент комплексного числа

$z = z + iy = r(\frac{x}{r} + i\frac{y}{r}) \Rightarrow cos\phi = \frac{x}{r}; \quad sin\phi = \frac{y}{r}$

1.3 Умножение комплексных числе в тригонометрической форме

Пусть $z_1 = r_1(cos\phi_1 + isin\phi_1)$ $z_2 = r_2(cos\phi_2 + isin\phi_2)$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(cos(\phi_1 + \phi_2) + isin(\phi_1 + \phi_2))$ (1)

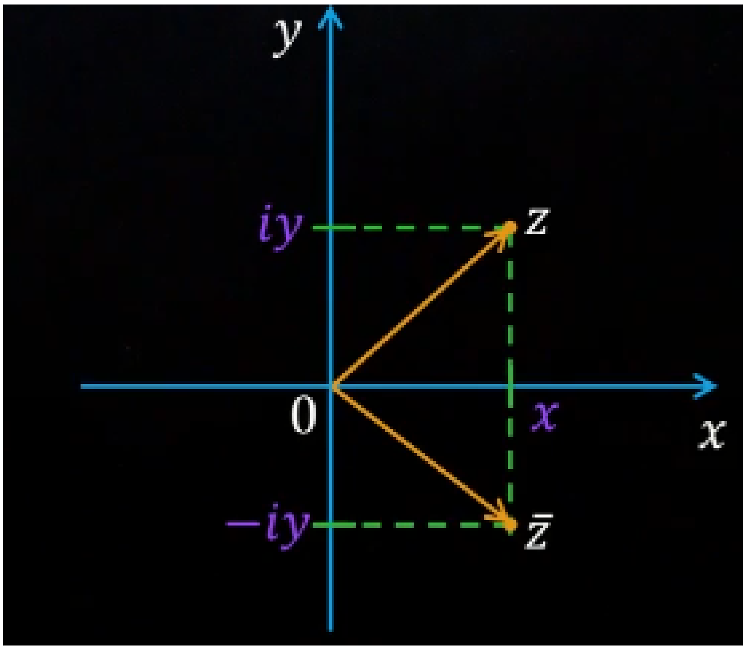
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad arg(z_1 \cdot z_2) = argz_1 + argz_2$

1.4 Комплексное сопряженное число

$z = x + iy \to \bar{z} = x - iy$

$\bar{z}$ - комплексно сопряженное по отношению к z

Если $z \in \mathbb{R}$ $(Imz = 0)$, то z $= \bar{z}$



1.4.1 Свойства операции сопряжения

1. $z_1 \bar{\cdot} z_2 = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
2. $\frac{\bar{z_1}}{z_2} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$
3. $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

1.5 Деление комплексных чисел

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$

1.5.1 Деление комплексных чилсе в тригонометрической форме

Пусть $z_1 = r_1(cos\phi_1 + isin\phi_1)$ $\quad z_2 = r_2(cos\phi_2 + isin\phi_2)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\phi_1 - \phi_2) + isin(\phi_1 - \phi_2))$ (2)

$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

1.6 Возведение в степень комплексного числа

Теорема: Если $z = r(cos\phi + isin\phi)$, то

$z^n = r^n(cosn\phi + isinn\phi)$, $\forall$ n $\in \mathbb{Z}$ (3)

(3) - Формула Муавра

Доказательство:

1. Если $n \in \mathbb{N}$, то формула (3) $\Rightarrow$ из (1)
2. Если $n = 0$, то $z^0 = 1 = r^0(cos0 + isin0)$
3. Если $n < 0$, то пусть n = -m, $m \in \mathbb{N}$

   $z^n = z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{r^m(cosm\phi+isinm\phi)} = \frac{1}{r^m} \cdot \frac{(cosm\phi-isinm\phi)}{(cosm\phi+isinm\phi)(cosm\phi-isinm\phi)} = r^{-m}(cos(-m\phi) + isin(-m\phi)) = r^n(cosn\phi + isinn\phi)$

1.7 Извлечение корня из комплексно числа

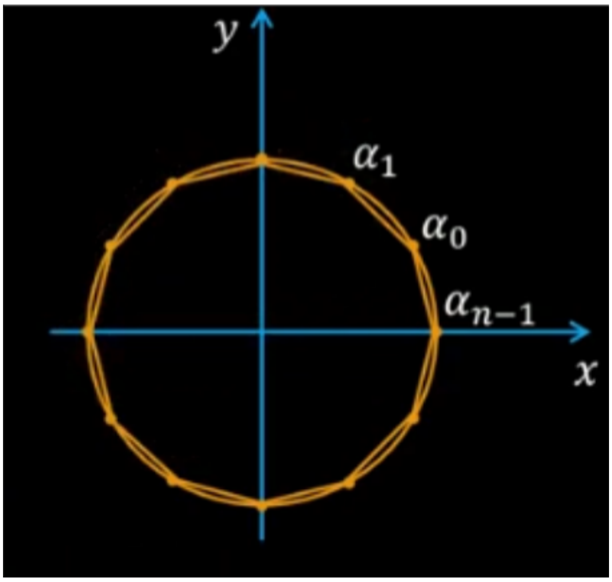
Определение: Пусть $n \in \mathbb{N}$. Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется комплексное число $\alpha : \alpha^n = z$

Теорема: Для ненулевого комплексного числа $z = r(cos\phi + isin\phi)$ существует ровно n различных корней $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ n-ой степени:

$\sqrt[n]{z} = \alpha_k = \sqrt[n]{r}(cos\frac{\phi+2\pi k}{n} + isin\frac{\phi+2\pi k}{n})$, k = 0, 1, 2, ..., n-1

Доказательство: Пусть $\alpha = p(cos\theta + isin\theta) \Rightarrow a^n = z \Rightarrow p^n(cosn\theta + isinn\theta) = r(cos\phi + isin\phi) \Leftrightarrow p^n = r$ и $n\theta = \phi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \alpha_k = \sqrt[n]{r}(cos\frac{\phi+2\pi k}{n} + isin\frac{\phi+2\pi k}{n})$ - корни n-ой степени из числа z. Всего n различных корней α_k лежат на окружности радиуса R = $\sqrt[n]{r}$ в вершинах правильного n-угольника



1.8 Показательная форма комплексного числа

$e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi$ (4)

(4) - формула Эйлера

Из (4) $\Rightarrow e^{-i\phi} = cos\phi - isin\phi$ (5)

Из (4) и (5) $\Rightarrow cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}$ и $sin\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}$

$z = re^{i\phi} \quad \bar{z} = re^{-i\phi}$

$z^n = r^n e^{in\phi}$ - формула Муавра в показательной форме

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi k}{n})}; \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1$

2 Многочлены

Определение: Многочленом n-ой степени называется функция $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, где $x \in \mathbb{C}; a_i \in \mathbb{C}; i = 0, 1, 2, ..., n; a_0 \neq 0$

Обозначение: deg P - степень многочлена P(x)

Замечание: Сложение и умножение многочленов определяются обычным образом, при этом:

$$deg(P + Q) \leq max(degP; degQ)$$

$$deg(P \cdot Q) = degP + degQ$$

Теорема: Для любых двух многочленов f(x) и g(x), где $g(x) \neq 0$, существует, и притом единственная, пара многочленов q(x) и r(x) такая, что

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \qquad (1)$$

где либо r(x) = 0, либо deg r < deg g

f(x) - делимое, g(x) - делитель, q(x) - частное, r(x) - остаток

Доказательство: Если f(x) = 0, то берем r(x) = q(x) = 0 и теорема верна.

Пусть $f(x) \neq 0$

I случай deg f < deg g ⇒ f = g · 0 + f

II случай deg f ≥ deg g

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$

$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m$

Применим метод мат индукции по степеням n многочлена f(x)

1) n = 0 ⇒ m = 0 и q(x) = $\frac{a_n}{b_m}$; r(x) = 0 ⇒ Теорема верна

2)Считаем, что теорема верна для любого многочлена степени < n.

Обозначим $f_1(x) = f(x) - \frac{a_0}{b_0}x^{n-m} \cdot g(x) \qquad (2)$

Либо $f_1(x) = 0$, либо deg $f_1 <$ n

Если $f_1(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{b_0}x^{n-m} \cdot g(x)$, те

$q(x) = \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$ и $r(x) = 0 \Rightarrow$ Теорема верна

Если $deg\ f_1 < n$, то по определению индукции

$f_1(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r(x)$, где либо r(x) = 0, либ deg r < deg g. Из (2) получим:

$f(x) = f_1(x) + \frac{a_0}{b_0}x^{n-m} \cdot g(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r(x) + \frac{a_0}{b_0}x^{n-m} \cdot g(x) = g(x) \cdot (\frac{a_0}{b_0}x^{n-m} + q_1(x)) + r(x) = [\frac{a_0}{b_0}x^{n-m} + q_1(x) = q(x)] = g(x) \cdot q(x) + r(x) \Rightarrow$ Теорема верна

Докажем единственность разложения (1). Пусть существуют два разложения: (1) и

$$f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) \qquad (3)$$

$deg\ r_1 < deg\ g$

Вычитаем (3) и (1):

$0 = g(x)(q(x) - q_1(x)) + r(x) - r_1(x) \Rightarrow g(q - q_1) = r_1 - r$

Пусть $q \neq q_1 \Rightarrow deg(g \cdot (q - q_1)) \geq deg\ g$

Но $deg(r_1 - r) \leq max(deg\ r_1, deg\ r) < deg\ g$ - противоречие $\Rightarrow q_1 = q$ и $r_1 = r$

Теорема Безу: Остаток от деления многочлена f(x) на (x-a) равен f(a)

Доказательство:

Разделим f(x) на (x - a):

f(x) = (x-a)q(x) + r(x)

где deg r < deg(x-a) = 1 $\Rightarrow$ r(x) = r = const

При x = a получим r = f(a)

Определение: x = a называется корнем многочлена f(x), если f(a) = 0

Замечание: Если остаток от деления f(x) на g(x) равен 0, то говорят, что f(x) делится на g(x)

Следствие из теоремы Безу: Если x = a - корень f(x), то f(x) делится на (x-a)

2.1 Кратность корня

Определение: Корень x = a называется корнем кратности k многочлена f(x), если f(x) делится на $(x - a)^k$ и не делится на $(x - a)^{k+1}$

Теорема: x = a - корень кратности k многочлена f(x) т и тт, когда $f(x) = (x - a)^k \cdot g(x)$, где g(a) $\neq$ 0

Основная теорема алгебры: Всякий многочлен, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный

Следствие: Всякий многочлен степени n ≥ 1 имеет ровно n корней, при этом

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = a_0(x - a_1)(x - a_2) \cdot ... \cdot (x - a_n) \qquad (4)$$

где $a_1, ..., a_n$ - корни многочлена $P_n(x)$

Доказательство: По основной теореме алгебры $\exists a_1 \in \mathbb{C} : P_n(a_1) = 0$

Тогда по следствию из теоремы Безу

$P_n(x) = (x - a_1)P_{n-1}(x)$

Если n-1 ≥ 1, то $\exists a_2 \in \mathbb{C} : P_{n-1}(a_2) = 0 \Rightarrow P_n(x) = (x - a_1)(x - a_2)P_{n-2}(x)$ и тд

В результате получим разложение (4)

Замечание: Сгруппировав в равенстве (4) множители с одинаковыми корнями, получим:

$$P_n(x) = a_0(x - a_1)^{k_1} \cdot (x - a_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x - a_r)^{k_r} \qquad (5)$$

$a_i \neq a_j$ при $i \neq j : k_1 + k_2 + ... + k_r = n$

k_i - кратность корня a_i

(5) - каноническое разложение многочлена (на множестве комплексных чисел)

3 Теорема Виета

Если $a_1, a_2, ..., a_n$ - корни многочлена

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, то

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + ... + a_n = -\frac{a_1}{a_0} \\ a_1a_2 + ... + a_1a_n + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n = \frac{a_2}{a_0} \\ ... \\ a_1a_2 \cdot ... \cdot a_k + ... = (-1)^k\frac{a_k}{a_0} \\ ... \\ a_1a_2 \cdot ... \cdot a_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

4 Многочлены с действительными коэффициентами

Пусть $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$

$a_i \in \mathbb{R}; i = 0, 1, ..., n$

Теорема: Если x = a $\in \mathbb{C}$ - корень многочлена $P_n(x)$, то x = $\bar{a}$ - тоже корень

Доказательство: Если a - корень $P_n(x)$, то

$a_0a^n + a_1a^{n-1} + ... + a_{n-1}a + a_n = P_n(a) = 0$

$P_n\bar{(}a) = \bar{0}$

$a_0a^n + a_1a^{n-1} \bar{+} ... + a_{n-1}a + a_n = 0$

$\bar{a_0}\bar{a}^n + \bar{a}_1\bar{a}^{n-1} + ... + \bar{a}_{n-1}\bar{a} + \bar{a}_n = 0$

$a_0\bar{a}^n + a_1\bar{a}^{n-1} + ... + a_{n-1}\bar{a} + a_n = 0$

$P_n(\bar{a}) = 0 \Rightarrow \bar{a}$ - корень $P_n(x)$

Замечание: Если a - корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x)$ делится на (x - a)

$\bar{a}$ - тоже корень $\Rightarrow P_n(x)$ делится на (x - $\bar{a}$)

Таким образом, $P_n(x)$ делится на

$(x-a)(x-\bar{a}) = x^2-(a+\bar{a})x+|a|^2$ - квадратный трехчлен с действительными коэффициентами.

Замечание: Если $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ - многочлен с действительными коэффициентами, то $P_n(x) = a_0(x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot .... \cdot (x-a_s)^{k_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{r_1} \cdot ... \cdot (x^2+p_lx+q_l)^{r_1}$ (6)

где $a_i \in \mathbb{R}; k_i \in \mathbb{N}; i = 1, ..., s;$

$p_j, q_j \in \mathbb{R}; r_j \in \mathbb{N}; j = 1, ..., l$

(6) - каноническое разложение многочлена (на множестве действительных чисел)

5 Линейные пространства

Определение: Линейным пространством называется множество $V = \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ...,$ где $\vec{a}$, $\vec{b}$,... - элементы пространства (векторы), если для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b} \in V$ и $\lambda\vec{a} \in V$, и выполняются следующие аксиомы:

$\forall\vec{a}, \vec{b} \in V \quad \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\forall\vec{a}\in V\ \ \exists$ ненулевой вектор $\vec{o}\in V:\vec{a}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{a}=\vec{a}$
4. $\forall\vec{a}\in V\ \ \exists$ противоположный вектор $-\vec{a}\in V:\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{o}$
5. $(\lambda\cdot\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$
6. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$
7. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$
8. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

Замечание: Линейное пространство называют также векторным пространством

5.1 Примеры линейных пространств

1. пространства геометрических векторов: V_1 - на прямой; V_2 - на плоскости; V_3 - в пространстве
2. множества $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$
3. множество матриц R^{mxn}
4. множество многочленов степени $\leq$ n - P_n
5. множество функци, непрерывных на отрезке [a,b] - $C_{[a,b]}$
6. n-мерное пространство арифметических векторов - $\mathbb{R}^n$ - множество всевозможных упорядоченных наборов из n действительных чисел, называемых арифметическими векторами

$\mathbb{R}^n=\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n);x_i\in\mathbb{R}$

Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,...x_n)$ и $\vec{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$

Тогда:

1. $\vec{x}=\vec{y}\Leftrightarrow x_i=y_i,\quad\forall i=1,2,...,n$
2. $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,....,x_n+y_n)$
3. $\lambda\vec{x}=(\lambda x_1,....,\lambda x_n)$

5.2 Простейшие свойства линейных пространств

1. В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент $\vec{o}$

2. Для любого вектора линейного пространства существует единственный противоположный вектор
3. $0 \cdot \vec{a} = \vec{o}$ и $\lambda \cdot \vec{o} = \vec{o}$

   Доказательство:

   Для доказательства равенства (1) достаточно доказать, что $\vec{b} + 0 \cdot \vec{a} = \vec{b}$, $\forall \vec{b} \in V$

   $\vec{b} + 0 \cdot \vec{a} = (\vec{b} + \vec{o}) + 0 \cdot \vec{a} = \vec{b} + ((-\vec{a}) + \vec{a}) + 0 \cdot \vec{a} = (\vec{b} + (-\vec{a})) + 1\vec{a} + 0\vec{a} = (\vec{b} + (-\vec{a})) + (1+0)\vec{a} = (\vec{b} + (-\vec{a})) + \vec{a} = \vec{b} + ((-\vec{a}) + \vec{a}) = \vec{b} + \vec{o} = \vec{b}$

   Равенство (2) доказывается, используя равенство (1) и аксиому 5):

   $\lambda \cdot \vec{o} = \lambda(0 \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot 0)\vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{o}$
4. В линейном пространстве из равенства $\lambda\vec{a} = \vec{o}$ следует, что либо $\lambda = 0$, либо $\vec{a} = \vec{o}$

   Доказательство:

   Из равенства (1) следует, что случай $\lambda = 0$ возможен, если $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{o}$

   Если $\lambda \neq 0$, то $\vec{a} = 1 \cdot \vec{a} = (\frac{1}{\lambda}\lambda)\vec{a} = \frac{1}{\lambda}(\lambda\vec{a}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{o} = \vec{o}$
5. -$\vec{a} = (-1)\vec{a}$

   Доказательство:

   $\vec{a} + (-1)\vec{a} = 1\vec{a} + (-1)\vec{a} = (1-1)\vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{o}$
6. Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в линейном пространстве существует, и притом единственная, разность $\vec{b} - \vec{a}$

   Доказательство:

   $\vec{a} + (\vec{b} + (-\vec{a})) = (\vec{a} + (-\vec{a})) + \vec{b} = \vec{o} + \vec{b} = \vec{b} \Rightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$

   Докажем единственность. Пусть $\exists \vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ - другая разность, но $\vec{c} = \vec{c} + \vec{o} = \vec{c} + (\vec{a} + (-\vec{a})) = (\vec{c} + \vec{a}) + (-\vec{a}) = \vec{b} + (-\vec{a})$

5.3 Линейное подпространство

Определение: Подмножество M $\subset$ V называется линейным подпространством линейного пространства V, если оно само является линейным пространством относительно операции сложения элементов и умножения элемента на число

Замечание: Подмножество M $\subset$ V есть линейное подпространство в линейном пространстве V тогда и только тогда, когда

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in M \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in M$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ и $\forall \vec{a} \in M \Rightarrow \lambda \vec{a} \in M$

Замечание: Подмножество M $\subset$ V есть линейное подпространство в линейном пространстве V тогда и только тогда, когда

$\forall \vec{a}, \vec{b} \in M$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \in M$

6 Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Пусть дано линейное пространство V и в нем система векторов $\vec{u_1}, ..., \vec{u_m}$

Определение: Линейной комбинацией векторов $\vec{u_1}, ..., \vec{u_m} \in V$ называется вектор вида

$$\vec{y} = \lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2} + ... + \lambda_m \vec{u_m} \quad (1)$$

где $\lambda_1, ...\lambda_m$ - произвольные числа

Определение: Линейная комбинация (1) называется тривиальной, если $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$

В противном случае линейная комбинация называется нетривиальной (те если хотя бы одно $\lambda_i \neq 0$)

Определение: Система векторов $\Sigma = \vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}$ называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, те если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, одновременно не равные нулю, такие что:

$$\lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2} + ... + \lambda_m \vec{u_m} = 0$$

Определение: Система векторов называется линейно независимой, если нулевому вектору равна только тривиальная линейная комбинация этих векторов

Замечание: Краткое определение:

Векторы $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}$ - линейно независимы, если $\lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2} + ... + \lambda_m \vec{u_m} = \vec{o} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$

В противном случае векторы линейно зависимы.

6.1 Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов

1. Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой

   Доказательство: Линейная зависимость системы из одного вектора равносильна тому, что $\lambda\vec{u} = \vec{o}$, а условие $\lambda\vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}(\lambda \neq 0)$ - следствие простейших свойств линейных пространств

2. Критерий линейной зависимости системы векторов. Система векторов $\Sigma = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}\}$, где m > 1, линейно зависима титт, когда хотя бы один из векторов этой системы линейно выражается через другие

   Необходимость: Если $\Sigma = \{\vec{u_1}, ..., \vec{u_m}\}$ линейно зависима $\Rightarrow \exists$ числа $\lambda_1, ..., \lambda_m$, одновременно не равные нулю и такие, что

   $$\lambda_1\vec{u_1} + ... + \lambda_m\vec{u_m} = \vec{o}$$

   Пусть $\lambda_i \neq 0$. Тогда в силу (2)

   $\vec{u_1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\vec{u_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_i}\vec{u_2} - ... - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\vec{u_{i-1}} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\vec{u_{i+1}} - ... - \frac{\lambda_m}{\lambda_i}\vec{u_m}$

   Достаточность: Пусть, например, $\vec{u_1} = \lambda_2\vec{u_2} + ... + \lambda_m\vec{u_m}$. Тогда $\vec{o} = -\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2} + ... + \lambda_m\vec{u_m}$ - это нетривиальная линейная комбинация $\Rightarrow$ $\Sigma = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, ...\vec{u_m}\}$ линейно зависима

3. Если подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима

4. Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима

5. Критерий линейной независимости системы векторов. Система векторов $\Sigma = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}\}$ линейно независима титт, когда любой вектор, являющийся линейной комбинацией этих векторов, имеет единственное разложение по этим векторам

6. Если система векторов $\Sigma = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}\}$ - линейно независима, а система векторов $\Sigma' = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}, \vec{v}\}$ линейно зависима, то вектор $\vec{v}$ линейно выражается через векторы $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}$

   Доказательство:

   Σ' - линейно зависима $\Rightarrow$

   $\lambda_1\vec{u_1} + ... + \lambda_m\vec{u_m} + \lambda_0\vec{v} = \vec{o} \quad (3)$

   где хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \lambda_0$ не равно нулю.

Если $\lambda_0 = 0$, то ненулевой коэффициент λ_k находится среди чисел $\lambda_1, ..., \lambda_m$

При этом равенство (3) переходит в равенство:

$$\lambda_1 \vec{u_1} + ... + \lambda_m \vec{u_m} = \vec{o} \quad (4)$$

где (4) - нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору

$\Rightarrow$ противоречие линейной независимости системы $\Sigma = \{\vec{u_1}, ..., \vec{u_m}\} \Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow$ вектор $\vec{v}$ линейно выражается из равенства (3) через векторы $\vec{u_1}, ..., \vec{u_m}$

6.2 Геометрической смысл линейной зависимости и линейной независимости для системы геометрических векторов

Теорема: Два вектора линейно зависимы титк, когда они коллинеарны

Необходимость: Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы $\Rightarrow$ согласно критерию линейной зависимости $\vec{a} = \lambda\vec{b} \Rightarrow \vec{a}||\vec{b}$

Достаточность: Пусть $\vec{a}||\vec{b}$ и $\vec{a} \neq 0$ (если $\vec{a} = \vec{o}$, то согласно свойствам 1) и 3) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы)

$\Rightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a} \Rightarrow$ согласно свойству 2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы

Теорема: три вектора линейно зависимы титт, когда они компланарны

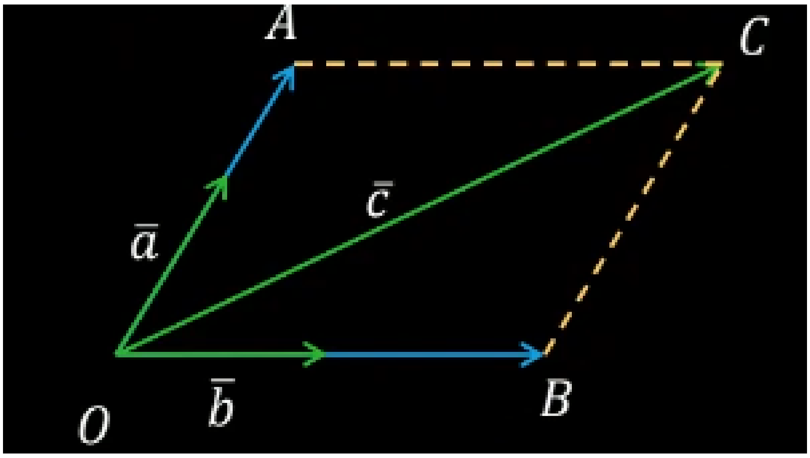
Необходимость: Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы $\Rightarrow$ один из них линейно выражается через другие. Пусть $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

Если $\vec{a}||\vec{b} \Rightarrow$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ коллинеарны и тем более компланарны

Если векторы $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Тогда приведем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к одному началу. Вектор $\vec{c}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{b}$ $\Rightarrow$ $\vec{c}$ лежит в той же плоскости, что и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\Rightarrow$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны

Достаточность: Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны и $\vec{a} \nparallel \vec{b}$(если $\vec{a}||\vec{b} \Rightarrow \vec{a}$ и $\vec{b}$ - линейно зависимы $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - линейно зависимы согласно свойству 3))

Приведем векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ к одному началу



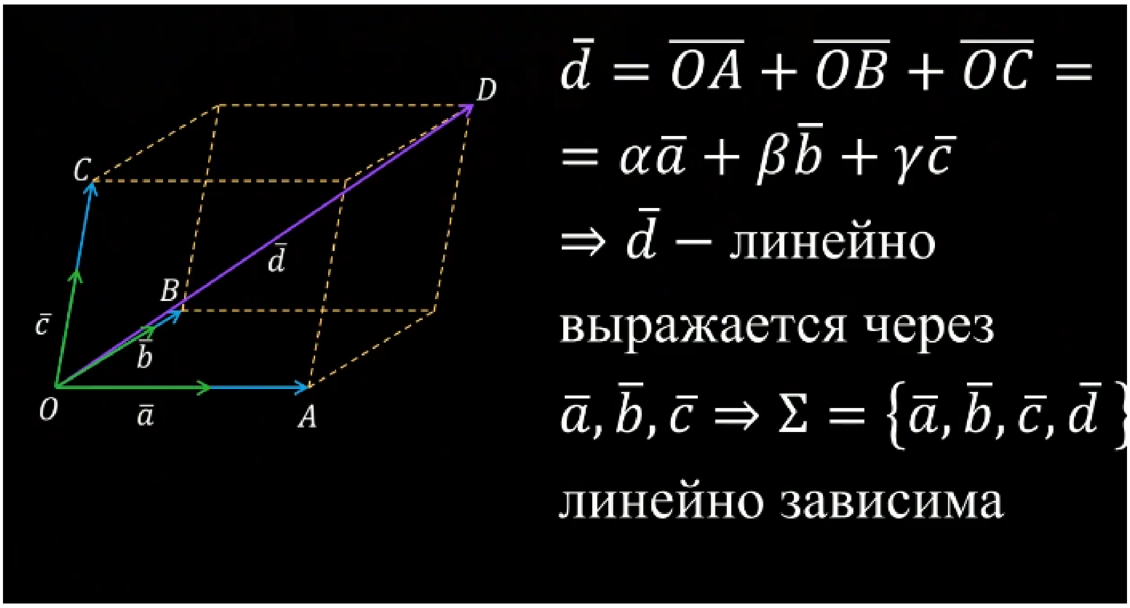
$\vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \Rightarrow \vec{c}$ линейно выражается через $\vec{a}$ и $\vec{b} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы

Теорема: Любые черыре вектора линейно зависимы

Доказательство: $\Sigma = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ - линейно зависима.

Рассмотрим $\Sigma' = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

1. Если Σ' линейно зависима $\Rightarrow \Sigma$ линейно зависима
2. Если Σ' линейно независима $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - некомпланарны



7 Размерность и базис линейного пространства

Говорят, что линейное пространство V имеет размершность n, если в пространстве V существует n линейно независимых векторов, а любая система из n+1 вектора линейно зависима.

Определение: Размерность линейного пространства - это наибольшее число линейно независимых векторов этом пространстве

Обозначение: dim V - размерность линейного пространства V

7.1 Первое определение базиса

Определение: Пусть V - n-мерное линейное пространство. Базисом B = $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\} \subset$ V называется любая система из n линейно независимых векторов в этом пространстве

Теорема(о разложении вектора по базису):

Пусть V - линейное пространство и $B = \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ - базис V. Тогда любой вектор $\vec{u} \in V$ есть линейная комбинация векторов базиса, те $\forall \vec{u} \in V \exists$ числа $x_1, x_2, ..., x_n$ такие, что

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n \qquad (1)$$

и разложение (1) единственно

Доказательство:

1. Докажем существование разложения (1)

   Возьмем любой вектор $\vec{u} \in V$. Рассмотрим систему векторов $\Sigma = \{\vec{u}, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$. Система Σ состоит из n+1 вектора. Тк dim V = n, то Σ - линейно зависима, те существует нетривиальная линейная комбинация $\lambda_0\vec{u} + \lambda_1\vec{e}_1 + ... + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{o} \quad (2)$,

   где хотя бы один из коэффициентов λ_0,...,λ_n отличен от нуля

   Предположим, что $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1\vec{e}_1 + ... + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{o}$. Но $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ - линейно независимы $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0 \Rightarrow$ противоречие и $\lambda_0 \neq 0$

   Из равенства (2) получим:

   $$\vec{u} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\vec{e}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_0}\vec{e}_2 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_0}\vec{e}_n =$$

   $= x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n$ - разложение (1)

2. Докажем единственность разложения (1)

   Пусть существуют два различных разложения:

   $$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n \qquad (1)$$

   и

$$\vec{u} = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + ... + y_n\vec{e_n} \qquad (3)$$

Вычитаем из равенства (1) равенство (3):

$\vec{o} = (x_1 - y_1)\vec{e_1} + ... + (x_n - y_n)\vec{e_n} \qquad (4)$

Тк $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ - линейно независимы, то линейная комбинация (4) тривиальна

$\Rightarrow x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0, ..., x_n - y_n = 0 \Rightarrow x_1 = y_1, ..., x_n = y_n \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ разложение (1) единственно

Замечание: Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются координатами вектора $\vec{u}$ в базисе B

Обозначение: Если $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ - базис в V, то

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B \Leftrightarrow \vec{u} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n$$

Пусть V - линейное пространство и $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ - базис в V

Теорема: Если

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

и

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}_B$$

, то

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ ... \\ x_n + y_n \end{pmatrix}_B$$

и

$$\lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ ... \\ \lambda x_n \end{pmatrix}_B$$

Доказательство:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i; \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_i$$

$$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i + \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \vec{e}_i$$

$$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ ... \\ x_n + y_n \end{pmatrix}_B$$

Аналогично для $\lambda \vec{u}$

7.2 Преобразование координат вектора при переходе к другому базису

Пусть V - линейное пространство и $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ и $B' = \{\vec{e}'_1, ..., \vec{e}'_n\}$ - базисы в V

B - исходный базис; B' - новый базис

Пусть

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

и

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}_B^{'}$$

Пусть векторы нового базиса раскладываются по векторам старого базиса:

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = c_{11} \vec{e}_1 + ... + c_{n1} \vec{e}_n \\ \vec{e}'_2 = c_{12} \vec{e}_1 + ... + c_{n2} \vec{e}_n \\ \vec{e}'_i = c_{1i} \vec{e}_1 + ... + c_{ni} \vec{e}_n \\ \vec{e}'_n = c_{1n} \vec{e}_1 + ... + c_{nn} \vec{e}_n \end{cases} \qquad (5)$$

$\Rightarrow$

$$\vec{e}'_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ ... \\ c_{ni} \end{pmatrix}$$

Введем матрицу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица перехода от базиса B к базису B'

Равенство (5) можно записать в матричном виде:

$$\varepsilon' = \varepsilon \cdot C \qquad (6)$$

где $\varepsilon = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n); \quad \varepsilon' = (\vec{e}'_1, ...\vec{e}'_n)$

Тк

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}_{B'} ; \vec{e}'_j = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ ... \\ c_{ni} \end{pmatrix}_B \text{ и} \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

$\Rightarrow \vec{u} = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i \vec{e}'_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ji} \vec{e}'_j = \sum\limits_{j=1}^{n} (\sum\limits_{i=1}^{n} x'_i c_{ji}) \vec{e}_j$

С другой стороны $\vec{u} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j$

В силу единственности разложения вектора по базису получим

$x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i c_{ji}, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (7)$

Запишем равенства (7) подробно

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + ... + c_{1n}x'_n \\ x_2 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + ... + c_{2n}x'_n \\ ... \\ x_j = c_{j1}x'_1 + c_{j2}x'_2 + ... + c_{jn}x'_n \\ ... \\ x_n = c_{n1}x'_1 + c_{n2}x'_2 + ... + c_{nn}x'_n \end{cases} \qquad (8)$$

Запишем систему (8) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}_{B'} \qquad (9)$$

,где

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица перехода от базиса B к базису B'

Теорема: Матрица перехода от базиса B к базису B' не вырождена

Доказательство:

Используем формулу (6): $\varepsilon' = \varepsilon \cdot C$

где $\varepsilon = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$; $\varepsilon' = (\vec{e}'_1, ..., \vec{e}'_n) \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon' \cdot C' = \varepsilon \cdot C \cdot C' = \varepsilon \cdot D$, где D = C · C'

Покажем, что D = (d_{ij}) = E - единичная матрица

$\vec{e}_i = \vec{e}_1 d_{1i} + \vec{e}_2 d_{2i} + ... + \vec{e}_i d_{ii} + ... + \vec{e}_n d_{ni} \Rightarrow \vec{o} = \vec{e}_1 d_{1i} + ... + \vec{e}_i(d_{ii} - 1) + ... + \vec{e}_n d_{ni} \quad (10)$

Тк векторы $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ - линейно независимы $\Rightarrow$ линейная комбинация (10) - тривиальная $\Rightarrow d_{1i} = 0, ..., d_{ii} - 1 = 0, ..., d_{ni} = 0$

$$\Rightarrow d_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad - \text{ символ Кронекера}$$

$\Rightarrow$ D = C · C' = E $\Rightarrow$ C' = C^{-1} $\Rightarrow$ C - не вырождена

Тк C - не вырождена, то из формулы (9) получим:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}'_B = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B \qquad (11)$$

(11) - преобразование координат вектора при переходе к новому базису

7.3 Линейная оболочка

Пусть $\Sigma = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m\}$ - система векторов линейного пространства V.

Определение: Линейной оболочкой системы векторов $\Sigma = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m\}$ называется множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов.

Обозначение: $L(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m)$ - линейная оболочка системы векторов $\Sigma = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m\}$

Таким образом $L(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m) = \{\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + ... + \lambda_m \vec{u}_m; \quad \lambda_i \in \mathbb{R}; \quad i = 1, ..., m\}$

Теорема: Если $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m$ - векторы линейного пространства V, то $L(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m)$ является линейным подпространством пространства V

Теорема вытекает из определения линейного подпространства.

Теорема: Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пространства. Линейное подпространство той же размерности, что и все пространство, совпадает с пространством

Доказательство: Первая часть формулировки теоремы очевидна.

Пусть M - линейное подпространство в линейном пространстве V $\Rightarrow$ M $\subset$ V

Пусть dim M = dim V = n

Возьмем в M линейно независимую систему векторов $\Sigma = \{\vec{e}_1, ...\vec{e}_n\}$. Система векторов Σ является базисом для обоих пространств M и V. $\Rightarrow \forall \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{u} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n \Rightarrow \vec{u} \in M \Rightarrow V \subset M \Rightarrow M = V$

Теорема: Если $\vec{x} = \lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_m\vec{u}_m$, то $L(\vec{x}, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_m) = L(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m)$

Доказательство: Очевидно, что $L(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m) \subset L(\vec{x}, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_m)$ $\forall \vec{v} \in L(\vec{x}, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_m) \Rightarrow \vec{v} = \alpha_0\vec{x} + \alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_m\vec{u}_m = \alpha_0(\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_m\vec{u}_m) + \alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_m\vec{u}_m = \beta_1\vec{u}_1 + ... + \beta_m\vec{u}_m \in L(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m) \Rightarrow L(\vec{x}, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_m) \subset L(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m) \Rightarrow L(\vec{x}, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_m) = L(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m)$

Определение: Система $\Sigma = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m\}$ называется системой образующих линейного пространства V, если ее линейная оболочка совпадает с пространством: $L(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m) = V$

Теорема (Теорема Штейница):

Пусть $\Sigma = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m\}$ - система образующих линейного пространства V и $\Sigma_1 = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ - линейно независимая система в пространстве V.

Тогда:

1. $m \geq n$
2. Какие то n векторов системы Σ можно заменить на векторы системы Σ_1 так, что полученная система останется системой образующих пространства V

Теорема: Любая линейно независимая система образующих линейного пространства V является его базисом

Доказательство: Пусть $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ - линейно независимая ситсема образующих пространства V. Покажем, что dim V - n.

В пространстве V существует n линейно независимых векторов. Покажем, что любые n+1 векторов линейно зависимы

Берем любую систему из n+1 вектора $\Sigma = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_{n+1}\}$. Предположим, что Σ - линейно независима.

Но тк $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ - система образующих пространства V $\Rightarrow$ по теореме Штейница $n \geq n + 1 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \Sigma$ - линейно зависима $\Rightarrow$ dim V = n и $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ - базис в V.

7.4 Второе определение базиса

$B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ - базис в линейном пространстве V, если

1. $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ - линейно независима;
2. L(B) = V, те $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ - система образующих пространства V

7.5 Определение базиса, удобное для решения задач

$B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ - базис в линейном пространстве V, если

1. $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ - линейно независимы
2. $\forall \vec{x} \in V \Rightarrow \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n$