МатАнал

Забродин Денис Александрович

10 декабря 2022 г.

Содержание

1 Основные свойсва дифферн функций

Основные теоремы дифференциального мисчелсения

Пусть y = f(x), x ∈ D и для ∀ x ∈ D ∃ f'(x) < ∞

Тогда буде говорить, что f(x) дифференцируема на множестве D

$C^1(D)$ - множества функций, дифференцируемых на D

$sinx \in C^1[a, b] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$|x| \notin C^1[-1; 1]$

C(D) - множество функций, непрерывных на D

$C^1(D) \subset C(d)$

Определение 1: Точка x0 называется точкой локального максимума функции f(x), если для $\forall x \in U(x_0) \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$

Определение 2: Точка x0 называется точкой локального минимума функции f(x), если $\forall xx \in U(x_0) \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$

Определение 3: Если $\forall x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f(x_0) \leq f(x)$, то говорят, что функция имеет глобальный min в точке x_0

Определение 4: Если для $\forall x \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$, то говоря, что функция имеет глобальный max в точке x_0

Точка локального максимума и минимума называются точками экстремума. Любой максимум и минимум называется Экстремумом (extr)

При отыскании экстремумов функции, дифференцируемых на отрезке, пользуются утверждением, содержащим необходимо условие ∃ экстремума

1.1 Теорема Ферма

Формула $a^n + b^n = c^n$ не имеет не дробных решений для $n > 2$

Пусть функция y = f(x) определена и непрерывна на [a;b] и в некоторой внутренней точке x_0 отрезка [a;b]: $x_0 \in (a, b)$ достигает своего экстремума

Тогда: если в этой точке сущ производная, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$

Доказ: Пусть во внутренней точке своей области орпделения функция имеет экстремум. Если в этой точке сущ производная, то она равна нулю.

1) Пусть функция f(x) имеет в точке x_0 максимум. Тогда у этой точки сущ окрестности, в которой $f(x) \leq f(x_0)$. В этом случае при x < x_0 мы имеем неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Переходя в этом неравнесвве к пределу, получаем, что $f'(x_0) \geq 0$, с другой стороны, при x $> x_0$ мы имеем неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, получаем, ччто $f'(x_0) \leq 0$. Отсюда следует, что $f'(x_0) = 0$

Теорема Ферма:

- Во внутренней точке экстремума производная может не существовать.
- Точка экстремума фукнциии может не быть внутренней точкой области орпделения
- Равенство нулю производной является необходимым условием, но это условие достаточным условием наличия экстремуаа не является

Геометрический смысл теоремы Ферма: Если фукнция в точке с имеет экстремум и дифференцируема в этой точке, те существует кассательная к графику функции, тогда это касательная параллельна оси Ox.

1.2 Теорема Ролля

Пусть f(x) $\in$ C [a;b] и f(x) $\in C^1(a;b)$ - дифференцируема внутри интервала (a;b) причем на концах отрезка функция f(x) приниммет одинаковые значения, те f(a) = f(b). Тогда существует такая точка c $\in$ (a;b) в которой f'(c) = 0

1. Если функция f(x) = const $\Rightarrow$ f(x) = 0 всюду, тогда утверждение теорпемы очевидно.
2. Предположим, теперь, f(x) $\neq$ const. Так как функция f(x) $\in$ C[a;b], то она принимает на нем свои максимальное и минимальное значение(т Вейерштрасса) $\Rightarrow \exists \alpha, \beta \in [a;b] : \quad \forall x \in [a;b] \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ Точки α и β являются, такими образом, точками экстремума функции f(x).

   Так как, f(x) $\neq$ const, то f(α) $\neq$ f(β)

   По условию теоремы f(a) = f(b) $\Rightarrow$ хотя бы одна из точкем α и β ялвяется внутренней точкой отрезка и по т Ферма в этой точке производная равна нулю.

Следствие: Если функция y = f(x) непрерывна на [a;b], дифференцируема на (a,b) и f'(x) $\neq$ 0 $\forall$ x $\in$ (a,b), то f(a) $\neq$ f(b)

Доказательство(от противного): Пусть f(a) = f(b), тогда по теореме Ролля $\exists C \in (a,b)(f'(C) = 0)$, что противоречит условию следствия

Геометрический смысл теоремы Ролля: если функцtя удовлетворяет учловиям теоремы Ролля, тогда найдется точка, в которой касательная параллельна оси Ox. Такая точка может быть не одна

Если f(a) = f(b) = 0, то теорема Ролля означает, что между двумя различнимы действительными корянми уравнения f(x) = 0 найдется хотя бы одни действительный корень уравнения f'(x) = 0

1.3 Теорема Веейрштрасса

Теорема: Если f - непрерывна на [a,b], то она ограничена

Доказательство: От противного f - непрерывна на [a,b], но неограниченна

$\forall M > 0 \;\; \exists x : \;\; |f(x)| > M$

$1 : \exists x_1 : |f(x_1)| > 1(M)$
$2 : \exists x_2 : |f(x_2)| > 2(M)$
...
$k \in \mathbb{N} : \exists x_k : |f(x_k)| > k(M)$

Но тк $x_n \in$ [a,b], то можно выбрать сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}
$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \to x_0 \Rightarrow$ a $\leq x_{n_k} \leq$ b

Тк функция непрерывная, то $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, но $f(x_{n_k}) \to \infty$ по условию, противоречие

Теорема: f - непрерывна на [a,b], то $\exists x_0 \in [a,b] : sup_{[a,b]} f = f(x_0)$

Доказательство: $sup_{[a,b]} f = M \in \mathbb{R}$ Определение $sup_{[a,b]} f$:

1) $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq M$
2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x : f(x) > M - \varepsilon$

Тогда возьмем $\varepsilon = \frac{1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists x_n : f(x_n) > M - \frac{1}{n}$

a $\leq x_n \leq$ b

Тк последовательность ограничена, то из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x_0$

В силу непрерывности функции $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$

$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le M \Rightarrow f(x_{n_k}) \to M$, но в силу непрерывности $f(x_{n_k}) \to f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = M$

1.4 Теорема Лагранжа

Пусть f(x) $\in$ C [a;b] и f(x) $\in C^1(a;b)$ - дифференцируема внутри интервала (a;b)

Тогда сущесвует такая точка $\xi \in (a;b)$, что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Построим вспомогательную функцию $\phi(x) = f(x) - \lambda x$ и параметр λ выберем так, чтобы ϕ(x) удовлетворяла теореме Ролля, те чтобы ϕ(a) = ϕ(b), тк непрерывность и дифференцируемость функции ϕ(x) очевидны.

ϕ(a) = ϕ(b) $\Rightarrow$ f(a) - λa = f(b) - λb $\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lambda$

Но, если ϕ(x) удовлетворяетс т Ролля, то существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $\phi'(\xi) = 0 \Rightarrow \phi'(x)|_{x=\xi} = f'(x) - \lambda|_{x=\xi} \Rightarrow f'(\xi) - \lambda = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \lambda \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Следвствие: Пусть функция f(x) дифференецируема на интервале (a;b)

Тогда для любых точке α, $\beta \in$ (a,b) найдется точка ξ, лежащая между α и β (те либо $\alpha \le \xi \le \beta$ либо $\beta \le \xi \le \alpha$), для которой f(β) - f(α) = f'(ξ)(β - α)

1) $\alpha < \beta$ По т Лагранжа: f(β) - f(α) = f'(ξ)(β - α)

2) $\alpha > \beta$ По т Лагранжа: f(α) - f(β) = f'(ξ)(α - β)

3) $\alpha = \beta$ Обе части равенства равны нулю, $\xi = \alpha$

Формулу Лаграна часто записывают в другой форме:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Эту теорему называют такэе теоремой о конечных приращениях

Геометрическая интерпретация т Лагранжа: Рассмтоим функция y = f(x), удовлетворяющую на отрезке [a;b] условиям теоремы.

Проведем стягивающую хорду AB, тогда отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = tg\alpha$

где α - угол наколона этой хорды к оси Ox

Тогда теорема утвердает, что найдется хотя бы одна точка $\xi \in$ (a,b), в которой касательная будет иметь тот же угол наклона, что и слягиающая хорда

1.5 Теорема Коши

Пусть функция f(x), g(x) $\in$ C[a,b] и f(x), g(x) $\in C^1(a;b)$

Пусть $\forall x \in (a;b) g'(x) \neq 0$.

Тогда сущесствует такая точка $\xi \in (a,b)$, для которой $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

те отношение приращений функций на отрезке равно отношению производных этихх функций в специально выбранной точке внутри отрезка.

Доказательство: Рассмотрим вспомогательную функцию $\phi(x) = f(x) - \lambda g(x)$, содержащую параметр λ, который выберем так, чтобы ϕ(x) удовлетворяла т Ролля.

Первым двум условиям этой теоремы ϕ(x) удовлетворяет, тк f(x) и g(x) нерперывны и дифферецируемы.

Потребуем выполнение 3-го условия:
$\phi(a) = \phi(b) \Rightarrow f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(a) \Rightarrow \lambda = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$

По т Ролля на (a;b) существует хотя бы одна точка ξ, что

$\phi'(\xi) = 0$, но $\phi'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, те $\phi'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow$ $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Следствие: Пусть функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a;b] и дифференцируеы в нитервале (a;b), причем при всех $x \in (a,b)$ производная g'(x) $\neq$ 0

Тогда для любых точек α, $\beta \in$ (a,b) найдется точка ξ, лежащая между α и β, для которой f(β) - f(α) = $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(g(\beta) - g(\alpha))$

1.6 Правило Лопиталя

Теорема 1: Пусть f(x) и g(x) определены и дифференцируемы в окрестности точки x = a, за исключением, быть может, самой точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, g(x) и g'(x) $\neq$ 0 в этой окрестности. Тогда если существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то сущевствует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательсвто: Будем считать, что a - конечное число. Доопределим функции f(x) и g(x) в точке x = a, полагая f(a) = g(a) = 0. Тогда эти функции будут непрерывны в точке a. Рассмотрим отрезок [a,x]. На [a,x] функция f(x) и g(x) нерпрерывны, а на (a, x) дифференцируемаы, поэтмоу по теореме Коши сущ точка $\xi \in (a, x)$, такая, что

$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Когда x $\to$ a, то ξ $\to$ a, поэтому в силу условия теоремы имеем

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

при уловии, что пределе в правой части равенства существует.

Замечание 1: Если функция f'(x) и g'(x) снова удовлетворяют теорема, то правило Лопиталя можно применить повторно.

Замечание: Следует внимательно проверять выполнение условий теоремы, в противном случае возможны ошибки

2 Производные высших порядков. Формула Тейлора

Пусть f: X $\to$ $\mathbb{R}$, x_0 - внутренняя точка области определения X, и пусть в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 везде существует производная

$\exists U(x_0): \quad \forall x \in U(x_0)$ определена $\phi(x) = f'(x)$

$f''(x) = \phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}; \quad f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2};$

Третья производная:

$y''' = f'''(x) = (f''(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f''(x+\Delta x)-f''(x)}{\Delta x}, \quad f'''(x) = \frac{d^3f}{dx^3}$

Производная порядка n:

$y^{(n)}(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{y^{(n-1)}(x+\Delta x)-y^{(n-1)}(x)}{\Delta x}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}$

Замечание: Для третьей производной еще допустимо обозначение тремя штрихами, но, начиная с 4-ой производной, их обозначают римскими цифрами или арабскими цифрами в скобках.

1. $y = e^{kx}; \quad y^n = k^n e^{kx}$
2. $y = x^k; \quad y^{(k)} = k!$
3. $y = sinx; \quad sin^{(n)}(x) = sin(\frac{\pi\cdot n}{2} + x)$
4. $y = cosx; \quad cos^{(n)}(x) = cos(\frac{\pi\cdot n}{2} + x)$

2.1 Правила вычисления производных высших порядков

1. $(c\cdot f)^{(n)} = c\cdot f^{(n)}$
2. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

3. $(f \cdot g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$ - формула Лейбница

2.2 Дифференциалы высших порядков

Дифференциал функции выражается формулой

$$df(x) = f'(x)dx$$

и является функцией двух переменных: x и dx. Дифференциал от первого дифференциала, который рассматривается как функция переменного x при постоянном значении dx, называется вторым дифференциалом (дифференциалом второго порядка).

$d^2f(x) = d(df(x))|_{dx=const} = (df(x))'dx = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2$

$$d^2f(x) = f''(x)(dx)^2$$

Дифференциалом порядка n называется дифференциал от дифференциала порядка n-1 при условии, что dx = const

Справедлива формула: $d^nf(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n$

Дифференциал второго порядка не обладает свойством инвариантности формы.

Пусть теперь x=x(t) - функция, => в силу инвариантности формы первого дифференциала

$$df(x) = f'(x)dx$$

второй дифференциал: $d^2f(x) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) = (f''(x)dx)dx + f'(x)d^2x = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$

причем в общем случае второй дифференциал: $d^2x = x''(t)(dt)^2 \neq 0$

$$d^2f(x) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$$

3 Приближение функции в точке. Многочлен Тейлора.

Рассмотрим функцию y = f(x), определенную в U(a) и имеющую производную до n - ого порядка в самой точке a:

$$\forall x \in U(a) \quad \exists f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^n(x)$$

Требуется найти такой многочлен T (x) степени меньшей, или равной n:

$T_n(a) = f(a);\;\; T'_n(a) = f'(a);\;\; T''_n(a) = f''(a); \ldots;\;\; T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

Этот многочлен будет близок к функции f(x) в U(a).

3.1 Многочлен Тейлора

Будем искать его в виде:

$T_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-n)^n \qquad (2)$

т.е. по степеням разности **(x - a)** с неопределенными коэффициентами.

Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ определим из условий (1):

$T_n(a) = f(a) = a_0$

$T'_n(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} \Rightarrow T'_n(a) = f'(a) = a_1$

$T''_n(x) = 2a_2 + 3 * 2a_3(x-a) + \cdots + n(n-1)a_n(x-a) \Rightarrow T''_n = f''(a) = 2a_2$

$T_n^{(n)} = n(n-1) * \cdots * 3 * 2 * 1 * a_n \Rightarrow T_n^{(n)}(a) = f^{(a)}(a) = a_n \cdot n!$

Следовательно,

$a_0 = f(a); \quad a_1 = f'(a); \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!}; \quad a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}; \ldots a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Тогда многочлени $T_n(x)$ принимает вид:

$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a) \cdot (x-a)^k}{k!} \qquad (4)$

Многочлен (4) называется многочленом Тейлора для данной функции f(x) в точке a.

Многочлен Тейлора является приближением функции f(x) в U(a).

4 Остаточный член

- Многочлен Тейлора, совпадая в самой точке a со значением функции f(x), для точек $x \in U(a)$ отличается от f(x).
- Оценим порядок малости разности $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ относительно приращения аргумента (x - a).
- Здесь $R_n(x)$ назовем остаточным членом

4.1 Остаточный член

Через него заданная функция выражается по формуле $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ или $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$

Частный случай формулы Тейлора при a=0 (он чаще всего и используется в приложениях) называют формулой Маклорена. В этом случае она выглядит следующим образом

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + ... + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

4.2 Форма Пеано

Пусть:

При x=a $\exists f'(a), f''(a), ..., f^n(a)$

Тогда

Замечание: остаток $R_n(x)$, записанный в виде (*), называется остаточным членом в форме Пеано.

$$R_n(x) = \underline{o}((x-a)^n) \qquad (*)$$

Доказательство:

Формула (*) эквивалентна тому, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$

Докажем, что это равенство выполняется, используя правило Лопиталя:

$\lim\limits_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-[f(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(a)]}{(x-a)^n} = [\frac{0}{0}] =$

$= \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)-[f'(a)+...+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(a)]}{n(x-a)^{n-1}}$

Применим правило Лопиталя еще n – 2 раза, получим:

$\lim\limits_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-[f^{(n-1)}(a)+\frac{x-a}{1!}f^{(n)}(a)]}{n(n_1)*...*3*2*(x-a)} = \frac{1}{n!}\lim\limits_{x\to a}[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}\cdot f^{(n)}(a)] = \frac{1}{n!}\lim\limits_{x\to a}(f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a)) = 0$

Итак,

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} * (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} * (x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} * (x-a)^n + \bar{o}[(x-a)^n]$

Это локальная формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

4.3 Остаточный член в форме Лагранжа

Остаточный член в форме Пеано дает лишь порядок малости разности $f(x) - T_n(x)$ и не позволяет оценить его численное значение

Остаточный член в форме Лагранжа похож на общий член в формуле

Тейлора, а именно

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$, где x $<\varepsilon<$ a или a $<\varepsilon<$ x

т.е. значение производной берется не в самой точке a, в некоторой надлежащим образом выбранной точке ε.

4.4 Оценка остатка

Пусть производные функции f(x) ограничены в U(a), $\exists M : |f^{(n+1)(x)}| < M$ для $\forall x \in U(a)$, $\Rightarrow |R_n(x) < \frac{M \cdot |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

4.5 Теорема единственности

Для функции y = f(x) разложение по формуле Тейлора единственно.

Доказательство:

Теорема единственности доказывается методом «от противного»

Пусть функция f(x) может быть разложена по формуле Тейлора двумя способами, т.е. $\exists a_i : (i = 1, ..., n)$ и $b_i \neq a_i \quad (i = 1, ..., n)$,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (x-a)^i + \bar(o)(x-a)^n \Rightarrow f(x) - f(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) \cdot (x-a)^i + \bar{o}(x-a)^n$$

$$0 = \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) \cdot (x-a)^i + \bar{o}(x-a)^n$$

т.е. в правой части – разложение нуля, но любая производная от $y \equiv 0$ равна нулю. Следовательно, $c_i = 0 \Rightarrow a_i - b_i = 0 \Rightarrow a_i = b_i$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, a_i – единственный набор коэффициентов. Теорема доказана

4.6 Формулы Макло́рена для элементарных функций

Формула Маклорена - это формула Тейлора в случае, когда $x_0 = 0$

Формула Маклорена с остаточным членом в форме Пеано выглядит так:

$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + ... + \frac{f^{(n)}}{n!} \cdot x^n + o(x^n)$

1. f(x) = e^x

   Тогда $f'(x) = f''(x) = ... = f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = e^x$

   $f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n)}(0) = 1$

   $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$, при x $\to 0$

   Остаточный член в форме Лагранжа $r_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$

2. f(x) = sinx

   Как было показано ранее, $f^{(n)}(x) = sin(x + \frac{\pi \cdot n}{2}), \quad n = 0, 1, 2...$

   Поэтому $f^{(n)}(0) = sin(\frac{\pi \cdot n}{2})$

   Если n = 2k, то $f^{(2k)}(0) = sin(\pi \cdot k) = 0, \quad k = 0, 1, 2....$

   Если n = 2k+1, то $f^{(2k+1)}(0) = sin(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k) = (-1)^k, \qquad k = 0, 1, 2, ...$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$$

   Остаточный член в форме Лагранжа: $r_n(x) = \frac{sin(c + \frac{\pi \cdot (n+1)}{2})}{(n+1)!} x^n$

3. f(x) = ln(1+x)

   Тогда f(0) = 0;

   $f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1$

   $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1;$

   $f'''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3}, \quad f'''(0) = 2;$

   $f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(0) = -3!$

   $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!$

   Подставляя эти значения в формулу Маклорена, получаем:

$$ln(1+x) = x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - .... + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n + o(x^n)$$

или

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

4.7 Представление функций формулой Маклрена до $o(x^k)$, где k - фиксированное число

Пример: Представим формулой Маклорена функцию f(x) = sinx * ln(1+x) до $o(x^5)$

$f(x) = (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4))(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)) = x(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)) - \frac{x^3}{3!}(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + o(x^5)$, x $\to$ 0

4.8 Представление формулой Тейлора. Замена переменной

Решение задачи представления функции форулой тейлора в окрестности точки $x_0 \neq 0$ состоит из трех этапов:

1. заменой переменной t = x - x_0 исходная задача сводится к представлению формулой Маклорена функции g(t) = f(x_0 + t) до того же порядка о-малого, что и исходная задача
2. решается задача представления формулой Мкклорена функции g(t) = f(x_0 + t)
3. выполняется обратная замена переменной, то есть подстановка выражения x - x_0 вместо переменной t

Пример: $y = 2xe^{2x}; x_0 = -1; n = 5$

$t = x - x_0 = x + 1 \Rightarrow x = t - 1$

$y = 2(t-1)e^{2t-2} = \frac{2}{e^2}[t(1+2t+\frac{2^2t^2}{2!}+\frac{2^3t^3}{3!}+\frac{2^4t^4}{4!}+\bar{o}(t^4))-(1+2t+\frac{2^2t^2}{2!}+\frac{2^3t^3}{3!}+\frac{2^4t^4}{4!}+\frac{2^5t^5}{5!}+\bar{o}(t^5))] = \frac{2}{e^2}[t+2t^2+\frac{2^2t^3}{2!}+\frac{2^3t^4}{3!}+\frac{2^4t^5}{4!}+t\bar{o}(t^4)-1-2t-\frac{2^2t^2}{2!}-\frac{2^3t^3}{3!}-\frac{2^4t^4}{4!}-\frac{2^5t^5}{5!}-\bar{o}(t^5)] = \frac{2}{e^2}[t+2t^2+2t^3+\frac{4t^4}{3}+\frac{2t^5}{3}+\bar{o}(t^5)-1-2t-2t^2-\frac{4t^3}{3}-\frac{2t^4}{3}-\frac{4t^5}{15}-\bar{o}(t^5)] = \frac{2}{e^2}[-1-t+\frac{2}{3}t^3+\frac{2t^4}{3}+\frac{2t^5}{5}+\bar{o}(t^5)] = \frac{2}{e^2}[-1-(x+1)+\frac{2}{3}(x+1)^3+\frac{2}{3}(x+1)^4+\frac{2}{5}(x+1)^5+\bar{o}((x+1)^5)]$

5 Свойства $\bar{o}$ малое

1. $\bar{o}$(f) + $\bar{o}$(f) = $\bar{o}$(f)
2. $\bar{o}(cf) = \bar{o}(f), \quad c \neq 0$
3. $c \cdot \bar{o}(f) = \bar{o}(f), \quad c \neq 0$
4. $\bar{o}(\bar{o}(f)) = \bar{o}(f)$
5. $\bar{o}(f + \bar{o}(f)) = \bar{o}(f)$

6. $\bar{o}(f^n) \cdot \bar{o}(f^m) = \bar{o}(f^{n+m})$
7. $(\bar{o}(f))^n = \bar{o}(f^n)$

5.1 Формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + \bar{o}((x - x_0)^n)$$

, при x $\to x_0$

5.2 Формула Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x! + o(x^n)$$

, при x $\to 0$

5.3 Таблица разложений

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \bar{o}(x^n)$$

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \bar{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \bar{o}(x^{2k+2})$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \bar{o}(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \bar{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} C_m^k x^k + \bar{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \bar{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \bar{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \bar{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^k + \bar{o}(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \bar{o}(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{k} + \bar{o}(x^n)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2}) = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!! x^{2k+1}}{(2k)!!(2k+1)} + o(x^{2n+2})$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \bar{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + \bar{o}(x^{2n+2})$$

5.4 Представление формулой Маклорена функцию $f(x) = e^x \cdot \sqrt{1+x}$ до $\bar{o}(x^2)$

$f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^2))(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \bar{o}(x^2))$

Находим представелния обеих функций до искомого порядка

Раскрываем первую скаблку, в каждом слагаемом учитываем только те члены вторго множителя, степень которых после раскрытия всех скобок не превосходит 2, то есть **точности представления**, тогда

$f(x) = (1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\bar{o}(x^2))+x(1+\frac{x}{2}+\bar{o}(x^2)+\frac{x^2}{2}+\bar{o}(x^2)) = 1+\frac{3x}{2}+\frac{7x^2}{8}+\bar{o}(x^2),\ x \to 0$

5.5 Представление формулой Тейлора. Замена переменной

Решение задачи представленияп функции формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 \neq 0$ состоит из трех этапов:

1. Заменой переменной t = x - x_0 исходная задача сводится к представлению формулой Маклорена функции g(t) = f($x_0 + t$) до того же порядка о-малого, что и исходная задача
2. Решается задача представления формулой Маклорена функции g(t) = f($x_0 + t$)
3. выполняется обртная замена переменного, то есть подстановка выражения $x - x_0$ вместо переменной t.

y = xe^{2x}; $x_0 = -1$; n = 5

1. t = $x - x_0$ = x + 1; x = t - 1
2. $y = xe^{2x} = (t-1)e^{2t-2} = \frac{te^{2t}}{e^2} - \frac{e^{2t}}{e^2} = \frac{t}{e^2}(1 + 2t + \frac{2^2t^2}{2!} + \frac{2^3t^3}{3!} + \frac{2^4t^4}{4!} + \bar{o}(t^4)) - \frac{1}{e^2}(1 + 2t + \frac{2^2t^2}{2!} + \frac{2^3t^3}{3!} + \frac{2^4t^4}{4!} + \frac{2^5t^5}{5!} + \bar{o}(t^5)) = \frac{1}{e^2}(-1 + t(1-2) + t^2(2 - \frac{2^2}{2!}) + t^3(\frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!}) + t^4(\frac{2^3}{3!} - \frac{2^4}{4!}) + t^5(\frac{2^4}{4!} - \frac{2^5}{5!})) + \bar{o}(t^5)$

5.6 Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx - arctgx}{x^3} = [\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{[x - \frac{x^3}{3!} + \bar{o}(x^4) - (x - \frac{x^3}{3} + \bar{o}(x^4))]}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3}(x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{3} + \bar{o}(x^4)) = \lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{6} + \bar{o}(x)) = \frac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\bar{o}(x^4)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\bar{o}(x^4)x}{x^4}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\bar{o}(x^m)}{x^k} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\bar{o}(x^m)x^{m-k}}{x^m} = 0$, если m > k

Пример: Указать порядок малости бесконечно малой функции $\alpha = 2x - 2sinx + ln(1 - 2x^3)$ относительно x при x $\to$ 0

$\alpha(x) = 2x - 2(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \bar{o}(x^6)) + (-2x^3 - \frac{2^2x^6}{2!} + \bar{o}(x^6)) = x^3(\frac{2}{3!} - 2) - x^5\frac{2}{5!} - \frac{2^2x^6}{2!} + \bar{o}(x^6) = x^3((\frac{2}{3!} - 2) - x^2\frac{2}{5!} - \frac{2^2x^3}{2!} + \frac{\bar{o}(x^6)}{x^3})$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^3} = \frac{2}{3!} - 2$$

5.7 Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций

Утверждение: При x $\to +\infty$ логарифмическая функция возрастает медленнее степенной, а степенная - медленнее показательной:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x^\alpha} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x^\alpha} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\alpha x^{\alpha-1}} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^m}{\alpha^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{mx^{m-1}}{a^x lna} = ... = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{m(m-1)(m-2)...2\cdot 1}{a^x(lna)^m} = 0$

6 Приложение дифференциального исчисления к исследованию функций

Вторая производная функции, если она существует, может быть так же эффективно использована для исследования на экстремум, определения промежутков выпуклости и вогнутости ее графика, отыскания точек перегиба.

6.1 Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Понятия выпукслости и вогнутости графика функции в точке.

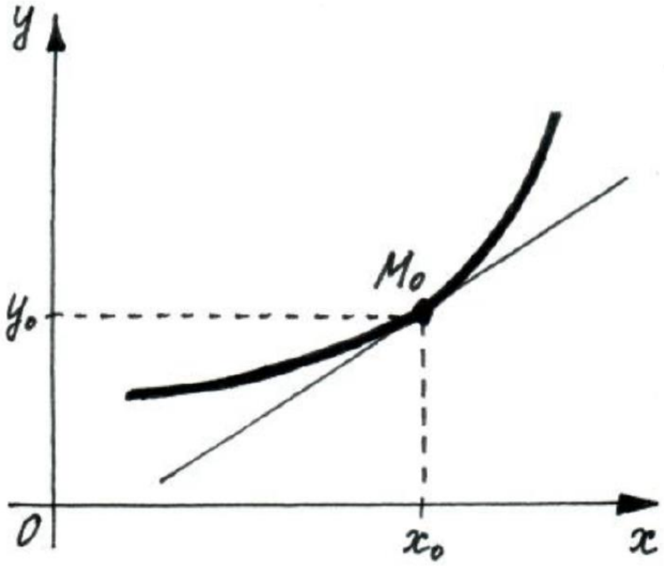
Пусть функция y = f(x) такая, что f(x), f'(x), f''(x) непрерывна $U(x_0)$

Возьмем точку $M_0(x_0; y_0)$ на графике этой функции и проведем касательную к кривой в этой точке.

Если в $U(x_0, \delta)$ дуга кривой находится над касательной, то кривая в точке x_0 называется **вогнутой**

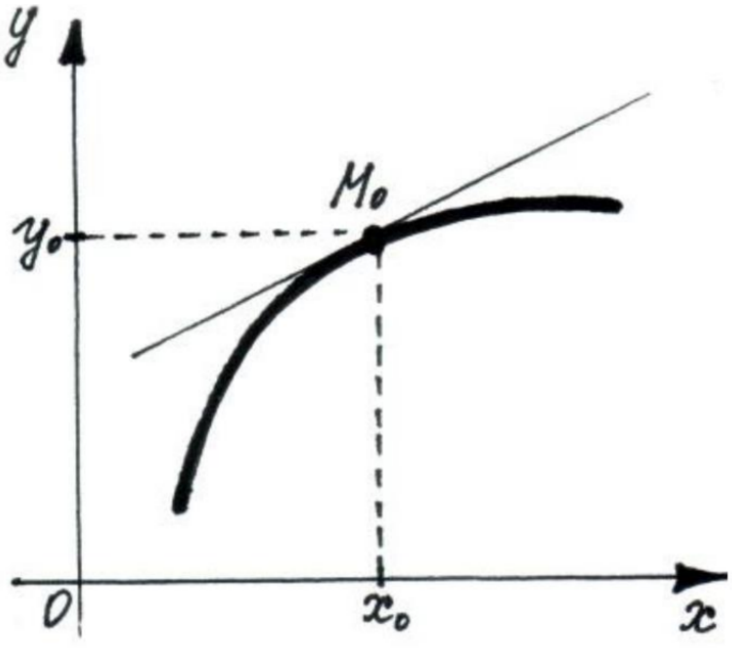
Определение: Функция, непрерывная на промежутке, и дифференцируемая в любой его внутренней точке, называется вогнутой на этом промежутке, если в любой его внутренней точке касательная к графику лежит ниже самого графика на этом промежутке.

То есть $\forall x_0 \in X^\circ, \quad \forall x \in X \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x)$

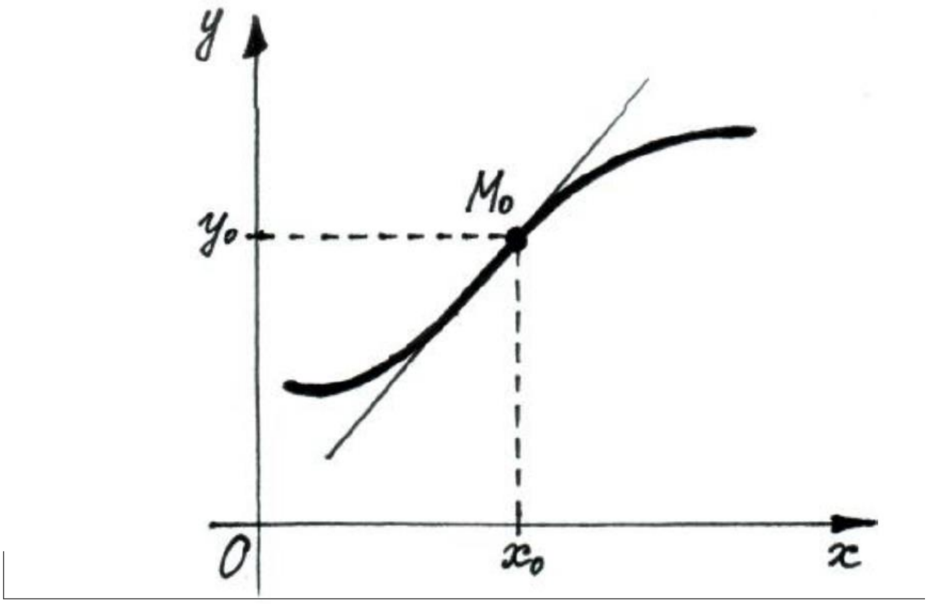


Определение: Функция, непрерывная на промежутке, и дифференцируемая в любой его внутренней точке, называется выпуклой на этом промежутке, если в любой его внутренней точке касательная к графику лежит выше самого графика на этом промежутке.

То есть $\forall x_0 \in X^\circ, \quad \forall x \in X \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \geq f(x)$



Если же при переходе через точку M_0 дуга кривой пересекает касательную, то точка x_0 называется **точкой перегиба**



6.2 Выпуклость и вогнутость графика функции на интервале

Кроме понятий вогнутости и выпуклости в точке введем аналогичные понятия на интервале.

Пусть функция y = f(x) определена на (a,b), и точки x_1, x_2 таковы, что a < $x_1 < x_2 <$ b. Через точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ проведем хорду AB, ординаты которой обозначим $\widetilde{y}$. Очевидно, $\widetilde{y}(x_1) = f(x_1) \quad \widetilde{y}(x_2) = f(x_2)$

Если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ и $\forall x \in (x_1, x_2) \Rightarrow f(x) > \widetilde{y}(x)$, то функция y = f(x) выпукла на (a,b). Если же f(x) < $\widetilde{y}(x)$, то функция y = f(x) вогнута на (a,b)

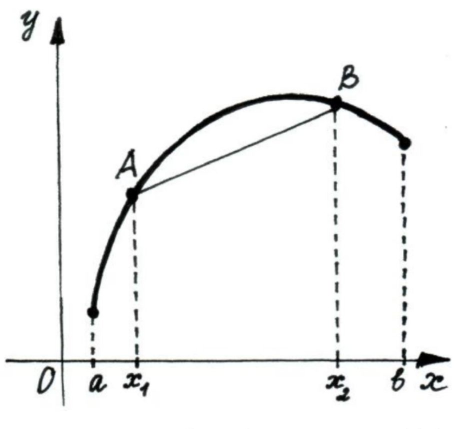


рис. 1.2.1. График функции *y* = *f* (*x*), выпуклой на **(*a*; *b*)**

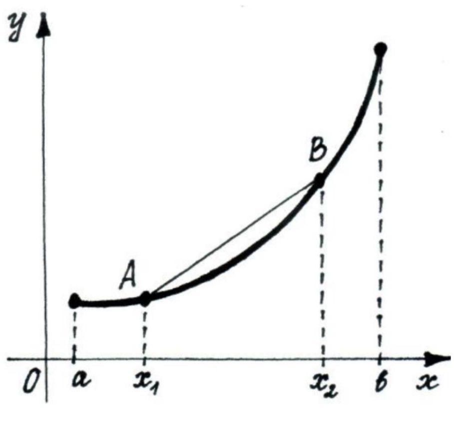


рис. 1.2.2. График функции *y* = *f* (*x*), вогнутой на **(*a*; *b*)**

6.3 Теорема 1. Достаточное условие выпуклости и вогнутости функции

Если функция y = f(x)

1. определена на (a,b)
2. непрерывна на (a,b)
3. дважды дифференцируема на (a,b), те $\exists f'(x), f''(x)$;
4. f"(x) > 0 (f"(x) < 0)

то функция на **(a,b) вогнута (выпукла)**

ясно, что вопрос о выпуклости, вогнутости или точке перегиба зависит от знака разности между ординатами кривой и касательной в $U(x_0)$, те от sgn d = sgn(f(x) - $\widetilde{a}y$)

А именно:

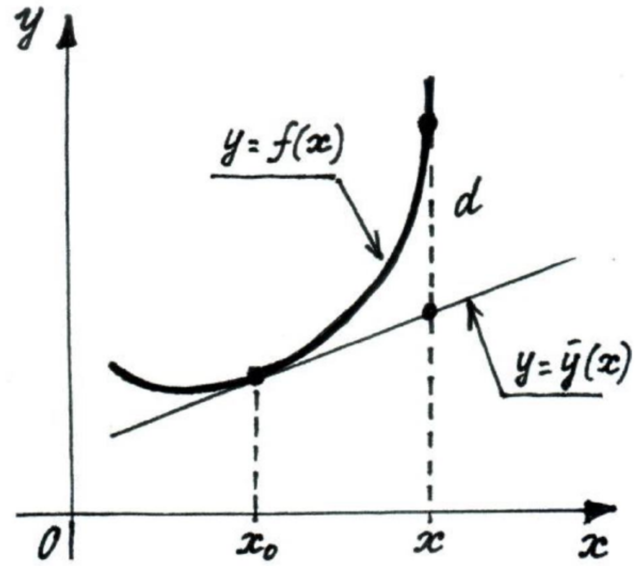
если в $U(x_0)d > 0$, то функция вогнута в точке x_0

если в $U(x_0)d < 0$, то функция выпукла в точке x_0

если в $U(x_0)$ при x < x_0 d > 0, а при x > x_0 d < 0, или,

наоборот, при x < x_0 d < 0, а при x > x_0 d > 0,

те d меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 является точкой перегиба



Доказательство Пусть x_0 - произвольная точка на (a,b). Уравнение касательной в точке x_0: $\widetilde{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

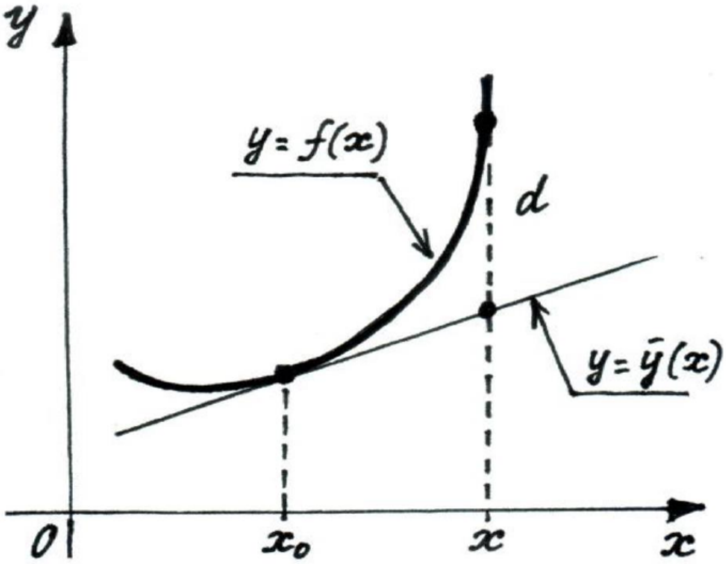
По формуле Тейлора в $U(x_0)$:

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\varepsilon) \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!}$, где $x_0 < \varepsilon < x$ (или x $< \varepsilon < x_0$) $\Rightarrow$

$d = f(x) - \widetilde{y} = f''(\varepsilon) \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!} \Rightarrow sgn(d) = sgn(f''(\varepsilon))$

Для $x \in U(x_0)$ в силу непрерывности функции y = f(x), y = f”(x) имеет тот же знак, что и y = f”(x_0).

Если $f''(x_0) > 0$, то, следовательно, и $f''(\varepsilon) > 0$, d > 0, а значит, функция y = f(x) вогнута. Если $f''(x_0) < 0$, то, следовательно, и $f''(\varepsilon) < 0$, d < 0, а значит, функция y = f(x) выпукла.



6.4 Теорема 2. Необходимое условие точки перегиба

Если для функции y = f(x) выполняются следующие условия:

1. f(x), f’(x), f”(x) - непрерывны в точке x_0
2. f(x) имеем в x_0 точку перегиба, то f”(x) = 0 или f”(x_0) = ∞

Доказательство: следует из теоремы 1. Если в x_0 $f''(x_0) > 0$ или $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 либо вогнутость, либо выпуклость, те перегиба нет.

6.5 Теорема 3. Достаточное условие точки перегиба

Если для функции y = f(x) выполняются следующие условие:

1. f(x), f’(x), f”(x) - непрерывны в точке x_0
2. при переходе через x_0 $f''(x)$ меняет знак, то в x_0 - точка перегиба

Доказательство: следует из теоремы 1

6.6 Второе достаточное условие экстремума

Пусть функция f определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, причем $f'(x_0) = 0$ (те x_0 - стационарная точка)

Тогда

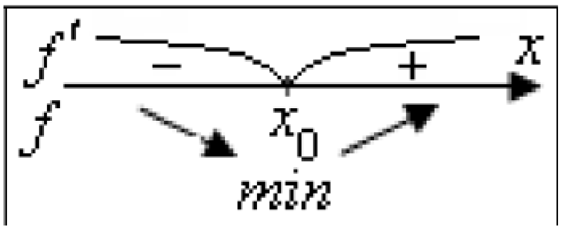
1. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума
2. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума

Доказательство:

1. Пусть $f''(x_0) > 0$. Так как по условию $f'(x_0) = 0$, то

   $c = f''(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 - \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$

   По определению предела для $\varepsilon = \frac{c}{2} > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что $\forall \Delta x : 0 < |\Delta x| < \delta$ выполнено неравенство $|\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x} - c| < \varepsilon = \frac{c}{2}$. Значит $\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x} > \frac{c}{2} > 0$ при $0 < |\Delta x| < \delta$. Поэтому: если Δ x < 0 (слева от x_0), то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$, а если $\Delta x > 0$ (справа от x_0), то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$, а если $\Delta x > 0$ (справа от x_0), то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$

2. Для случая $f''(x_0) < 0$ доказательство аналогично

Замечание: Эта теорема может оказаться удобной, когда знак f”(x) определяется легко. Однако ее недостаток в сравнении с первым достаточным условием экстремума функции очевиден: не все точки, подозрительные на экстремум, могут быть исследованы с помощью данной теоремы. Теорема неприменима в случаях, когда в точке x0 первая производная функции обращается в бесконечность или же не определена и, конечно, когда f”(x) не существует.

6.7 Теорема. (Второе достаточное условие перегиба)

Пусть функция f дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, $f''(x_0) = 0$, и $\exists f'''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 - точка перегиба функции f.

6.8 Теорема. (Третье достаточное условие экстремума)

Пусть

1. функция f определена и 2n раз дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0
2. $f'(x_0) = ... = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$
3. $f^{(2n)}(x)$ непрерывна в точке x_0

Тогда

1. если $f^{(2n)}(x_0) > 0$, то x_0 - точка (строгого) минимума
2. если $f^{(2n)}(x_0) < 0$, то x_0 - точка (строгого) максимума

6.9 Третье достаточное условие точки перегиба

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 - существует производная $f^{(2n+1)}$, непрерывная в точке x_0, причем $f''(x_0) = ... = f^{(2n)}(x_0) = 0$, а $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 - точка перегиба

6.10 Общая схема построения графика функции

1. Найти область определения функции. Проверить на чётность/нечётность, периодичность. Найти точки пересечения графика с осями координат, промежутки знакопостоянства функции. Найти точки разрыва.
2. Найти вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты графика. Вычислить односторонние пределы в точках разрыва и на границах области определения.
3. Изобразить схему графика по результатам п.п.1,2.
4. Вычислить первую производную функции, определить критические точки по первой производной, определить знаки производной на промежутках между критическими точками. Сделать выводы о промежутках возрастания/убывания и экстремумах.
5. Вычислить вторую производную, определить критические точки по второй производной, определить знаки второй производной на промежутках между этими критическими точками. Сделать выводы о промежутках выпуклости и вогнутости, о точках перегиба.
6. Нарисовать график. Дополнительно иногда бывает удобно найти и нарисовать касательную к графику в точках перегиба, в угловых точках и т.п.