Интегралы

Забродин Денис Александрович

2 апреля 2023 г.

Содержание

1 Основные определения, примеры

Задача дифференциального исчисления — нахождение производной или дифференциала данной функции.

В интегральном исчислении решается обратная задача: по данной функции f(x) ищется такая функция F(x), чтобы F'(x) = f(x) или dF = f(x)dx

т.е. другими словами, по данной производной или дифференциалу функции требуется восстановить эту функцию.

Определение: Функция F(x) называется первообразной по отношению к функции f(x) на некотором промежутке, если на этом промежутке:

1. функция F(x) диффференцируема
2. F'(x) = f(x) или, что то же самое, dF(x) = f(x)dx

Следующее утверждение сразу следует из определения первообразной

Лемма1: Если F(x) - некоторая первообразная для функции f(x), то F(x) + C также является первообразной для функции f(x)

Верно и обратное утверждение: Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции f(x) на промежутке X. Тогда они отличаются только на константу, те $F_1(x) - F_2(x) \equiv const$

Доказательство: Найдем производную от разности этих первообразных: $(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Тогда, по теореме об условиях постоянства функции на промежутке, $F_1(x) - F_2(x) \equiv const$

Терема о множестве первообразных: Если F(x) - некоторая первообразная функции f(x) на промежутке X, то F(x) + C, где C - произвольная константа, множество всех первообразных функции f(x) на промежутке X

Если даны две первообразные $F_1(x), F_2(x)$ одной и той же непрерывной функции f(x) на некотором промежутке, то всюду на этом промежутке $F_1(x) = F_2(x) + const$

Замечание: Существование первообразной для данной функции не означает, что эта первообразная выражается в конечном виде через элементарные функции.

Операция перехода к первообразной имеет свое название - неопределенное интегрирование, и обозначение: $\int f(x)dx$

Определение. Совокупность всех первообразных функции f(x) называется её неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C $\in \mathbb{R}$, а выражение f(x)dx называется подынтегральным выражением, f(x) - подынтегральной функцией.

Утверждение: Дифференцирование и неопределенное интегрирование взаимообратные операции с точность до постоянной C

Доказательство:

$d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx$

$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$

Следствие: Производная от неопределнного интеграла равна подынтегральной функции.

Доказательство:

$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$

Теорема о существовании первообразной и неопределенного интеграла у непрерывной функции.:

Если функция f(x) $\in$ C(a, b), то на (a, b) существует первообразная F(x) для данной функции и неопределенный интеграл.

2 Свойство неопределенного интеграла

1. Интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс постоянная

   $\int dF(x) = F(x) + C$

   Доказательство: $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$

2. Дифференциал от интеграла равен подынтегральному выражению

   $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

   Доказательство: $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx$

3. (свойство линейности неопределенного интеграла)

   $\int(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx$

   Это свойство проверяется дифференцированием левой и правой части равенства с использованием свойств линейности дифференцирования.

3 Методы интегрирования

3.1 Замена переменной в неопределенном интеграле

Подведение под знак дифференциала постоянного слагаемого

$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(x+a)dx = F(x+a) + C$

Доказательство: $\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}F(x+a) = (F(x+a))' \cdot (x+a)' = f(x+a)$

Подведение под знак дифференциала постоянного множителя

$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$

Доказательство: $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}(\frac{1}{a}(ax)) = \frac{1}{a}(F(ax))' \cdot (ax)' = \frac{1}{a}af(ax)$

Подведение под знак дифференциала. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(\phi(x))d\phi(x) = F(\phi(x)) + C$

3.2 Интегрирование по частям

По правилу дифференцирования произведения

duv = udv + vdu ⇒ udv = duv - vdu,

Откуда $\int udv = uv - \int vdu$

4 Определенный интеграл. Интеграл Римана

4.1 Определенный игтреграл как предел интегральной суммы

Определение. Интегральная сумма

Рассмотрим функцию y = f(x) , определенную и непрерывную на [a,b]. Разобьем [a,b] произвольным образом на n частей точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и на каждом полученном отрезке $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ произвольно выберем точку ϵ_i и вычислим значение функции в это точке. Составим сумму,

$$f(\epsilon_0) \cdot \Delta x_0 + f(\epsilon_1) \cdot \Delta x_2 + ... + f(\epsilon_{n-1}) \cdot x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\epsilon_i) \cdot \Delta x_i$$

называемую интегральной суммой Римана для функции y = f(x) на отрезке [a; b].

Определение. Разбиение отрезка

Совокупность точек деления отрезка $x_0, x_1, ..., x_n$ и промежуточных точек $\epsilon_0, ..., \epsilon_n$ будем называть разбиением отрезка, и обозначать буквой T. Каждому разбиению соответствует определенная интегральная сумма. Интегральная сумма есть функция, определенная на множестве разбиений. Обозначим через $d_T = max_i|\Delta x_i|$ - диаметр разбиения. Устремим $n \to \infty$, тогда, $d_T \to 0$ и все $\Delta x_i \to 0$, и возьмем предел интегральной суммы : $\lim\limits_{n\to\infty\ d_T\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(\epsilon_i) \cdot x_i$

$f(\epsilon_0) \cdot \Delta x_0 + f(\epsilon_1) \cdot x_1 ... + f(\epsilon_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\epsilon_i) \cdot \Delta x_i$

Определение 3. Определенный интеграл.

Определенным интегралом Римана функции y = f(x) на отрезке [a; b] называют число равное $J = \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d_T\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\epsilon_i) \cdot \Delta x_i$

те при $n \to \infty$ и $d_T \to 0$ в предположении, что этот предел существует и не зависит от разбиения T отрезка [a; b], т.е. от выбора точек $x_1, ..., x_{n-1}$ и ϵ_i

Определение. Если существует $\int_a^b f(x)dx$, функция f(x) называется интегрируемой на [a,b]

Теорема существования определенного интеграла

Напомним: функция называется кусочно-непрерывной на [a; b], если этот отрезок можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых функция непрерывна. Теорема существования формулируется так:

Если функция y = f(x) ограничена и кусочно-непрерывна на [a; b], то она интегрируема на этом отрезке.

Следствие

Интегрируемость непрерывной функции является частным случаем этой теоремы.

4.2 Геометрический смысл определенного интеграла (для f(x) > 0)

На рисунке $f(\epsilon_i)\Delta x_i$ - площадь выделенного прямоугольника, S_n сумма площадей прямоугольнов, те площадь фигуры, ограниченной ломаной линией, прямыми x = a, x = b и осью Ox.

Если max $\Delta x_i \to 0$, то ломаная стремится к графику y = f(x), и $S_n \to S$ (S - площадь криволинейной трапеции).

Вывод. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) > 0, численно равен площади S кирволинейной трапеции, ограниченной графиком подынтегральной функции, прямыми x = a, x = b и осью Ox.

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

4.3 Свойства определенного интеграла

1. Если y = f(x) ≥ 0 и a $<$ b, то $\int_a^b f(x)dx = S > 0$ есть площадь криволинейной трапеции.
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$, тк все $\Delta x_i = 0$
3. $\int_a^b dx = b - a$, тк интегральная сумма имеет вид $\sum \Delta x_i = \Delta x_0 + ... + \Delta x_{n-1} = b - 1$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, тк все Δx_i меняют знак, если разбиение отрезка начинать от точки b

Свойство линейности определенного интеграла

Если f_1 и f_2 интегрируемы на [a,b] и A,B - произвольные числа, то

$$\int_a^b (Af_1 + Bf_2)dx = A\int_a^b f_1 dx + B\int_a^b f_2 dx$$

Доказательство. Для интеграла в чевой части

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(Af_1(\epsilon_i) + Bf_2(\epsilon_i))\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} Af_1(\epsilon_i)\Delta x_i + \sum\limits_{i=1}^{n} Bf_2(\epsilon_i)\Delta x_i =$

$= A\sum_{i=1}^{n} f_1(\epsilon_i)\Delta x_i + B\sum_{i=1}^{n} f_2(\epsilon_i)\Delta x_i$

По условию $\sum\limits_{i=1}^{n} f_1(\epsilon_i)\Delta x_i \to \int_a^b f_1(x)dx$

$\sum\limits_{i=1}^{n} f_2(\epsilon_i)\Delta x_i \to \int_a^b f_2(x)dx$

Таким образом, существует предел правой части $A\int_a^b f_1 dx + B\int_a^b f_2 dx$ при $\max \Delta x_i \to 0$. Следовательно, существует предел левой части при $\max \Delta x_i \to 0$. Последений есть $\int_a^b (Af_1 + Bf_2)dx$, что и требовалось доказать.

Свойство аддитивности определенного интеграла

Если $c \in [a, b], \quad a < c < b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

При условии, что все три интеграла существуют

Интегрирование неравенства Если: 1) функции y = f(x) и y = g(x) интегрируемы на отрезке

2)f(x) $\leq$ g(x) для любого значения x из этого отрезка [a; b]

то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Доказательство: тк f(x) $\leq$ g(x), то g(x) - f(x) $\geq$, $\Rightarrow$ по свойству 1 $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0$, $\Rightarrow$ по свойству линейности $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Свойства определенного интеграла

Если:

1. функция y = f(x) непрерывна на [a,b]
2. M $= max_{[a,b]} f(x), \quad m = min_{[a,b]} f(x)$

то m(b-a) $\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Доказательство: Для непрерывной функции справедливо нерпвенство $m \leq f(x) \leq M$, которое можно проинтегрировать на отрезке [a,b]

При этом в силу свойства интегрирования неравенств: $\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$

Применяя свойство ($\int_a^b dx = b - a$) и св-во линейности получим требуемое неравенство.

Теорема о среднем для определенного интеграла

Если функция y = f(x) непрерывна на [a; b]

То на этом отрезке найдется хотя бы одна точка c $\in$ [a; b] такая что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

т.е. определенный интеграл равен произведению длины отрезка интегрирования на значение подынтегральной функции в специальным образом выбранной внутренней точке.

Доказательство: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ (интегрирование неравенств)

По свойству непрерывных на отрезке функций можно утверждать, что функция y = f(x) примет все промежуточные значения от m до M, т.е. найдется такая точка c $\in$ [a; b], что

$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

Геометрически теорему можно интерпретировать следующим образом: если функция f(x) $\geq$ 0 на [a; b], то площадь криволинейной трапеции, выражаемая определенным интегралом, равна площади прямоугольника, опирающегося на [a; b] со специально выбранной высотой f(c) – см. рисунок.

Переменную интегрирования можно обозначать произвольно, те

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$

5 Интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим функцию f(x), интегрируемую на [a,b]

Пусть x - произвольная точка отрезка [a,b]

Из интегрируемости f(x) на [a,b] следует интегрируемость f(x) на [a,x]. Можно сказать, что на отрезке [a,b] задана функция F(x): $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Функция F(x) называется интегралом с перемнным верхним пределом

Геометрически интеграл с переменным верхним пределом можно представить в виде меняющейся площади криволинейной трапеции (заштрихованная область на рисунке).

Теорема(о непрерывности интеграла по верхнему пределу)

Если функция y = f(x) - непрерывна на [a; b], то функция

$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$ непрерывна на[a; b].

$\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_x^a f(x)dx + \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx =$ По теореме о среднем $= f(c)\Delta x$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta\Phi(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c)\Delta x = 0 \Rightarrow \Phi(x) \in C[a, b]$

Теорема о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом (или о существовании первообразной у непрерывной функции)

Если функция y = f(x) непрерывна на [a; b], то функция Φ(x) = $\int_a^x f(x)dx$ является апервообразной для y = f(x), т.е. $\Phi'(x) = f(x)$ или, другими словами, производная интеграла с переменным верхним пределом по этому пределу равна подынтегральной функции.

Доказательство:

Запишем приращение функции Φ (x) используя формулу:

$\Delta\Phi = f(c) \cdot \Delta x, c \in [x, x + \Delta x]$ тогда при Δ x → 0 c → x, те

$\Phi'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x)$

6 Формула Ньютона-Лейбница (основная теорема интегрального исчисления)

6.1 Основная теорема интегрального исчисления.

Если функция y = f(x) непрерывна на [a,b] и $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Доказательство. Согласно предыдущей теореме у непрерывной функции y = f(x) существует первообразная Φ(x) = $\int_a^x f(x)dx \Rightarrow$

первообразная F(x), отличается от Φ (x) на константу:

$\Phi = \int_a^x f(x)dx = F(x) + C, \forall x \in [a, b]$

При x = a $\quad \int_a^a f(x)dx = 0 = F(a) + C$, те C = -F(a)

При x = b $\quad \int_a^b f(x)dx = F(x) + \ = F(b) - F(a)$

Правило

Для вычисления определеного интеграла нужно:

1. найти F(x)
2. вычислить F(b) - F(a)

7 Замена переменной в определенном интеграле

Теорема.

Если

1. f(x) непрерывна на [a,b]
2. x = g(t), x' = g'(t) непрерывна на $[\alpha, \beta]$ ([a,b] - область значений x = g(t) при изменении t $\in [\alpha, \beta]$)
3. a = g(α), b = g(β)

то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

Доказательство.

Рассмотрим левую часть формулы замены переменной: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$$

Вычислим $F'_t = F'_x = F'(g(t)) \cdot g'(t), \quad F'(g(t)) = F'(x) = f(x) = f(g(t))$

Таким образом, $F'_t = f(g(t)) \cdot g'_t \Rightarrow F(g(t))$ - первообразная для функции f(g(t)) $\cdot\ g'_t$ на $[\alpha, \beta]$

Рассмотриим правую часть доказываемой формулы $\int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$

Таким образом, $\int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt = F(b) - F(a)$, что завершает доказательство теоремы

Замечание 1. Подчеркнем, что при замене переменной в определенном интеграле особое внимание нужно уделять определению новых пределов интегрирование.

Замечание 2. Отметим, что при всей схожести применения формул замены переменной в неопределенном и определенном интегралах, имеется весьма важное их отличие: при вычислении определенного интеграла не нужно возвращаться к исходной переменной, вместо этого просто производится соответствующее изменение пределов интегрирования.

8 Формулы интегрирования по частям в определнном интеграле

Теорема. Если u(x) и v(x) имеют на [a,b] непрерывные производные, то

$\int_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x))|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$, или

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения имеем $(uv)' = u'v + uv'$

Выполним почленное мнтегрирование этого равенства на [a,b]

$\int_a^b (u'v + uv')dx = \int_a^b (uv)'dx \Rightarrow \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx = \int_a^b (uv)'dx$

Существование каждого из интегралов обеспечено условием теоремы. С учетомсоотношений $u'dx = du$, $v'dx = dv$, $\int_a^b (uv)'dx = uv|_a^b$ из полученного равенства интегралов следует справедливость доказываетмой формулы $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$

9 Несобственные интегралы

$\int\limits_a^b f(x)dx$ предполагает, что 1) a,b - конечные числа 2) f(x) - ограничена на [a,b] (необходимое условие интегрируемости)

Если нарушается условие ограниченности по оси Ox, мы получаем несобственный интеграл первого рода, он будет записываться следующим образом

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

Если нарушается условие ограниченности по оси Oy, мы получаем несобственный интеграл второго рода, он будет заисан в виде

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx$$

но функция f(x) не ограничена в окрестности левого или правого конца [a,b]

9.1 Несобственный интеграл первого рода

Пусть функция y = f(x) непрерывна на промежутке a $\leq$ x $<$ $+\infty$ и интегрируема на любой его части

Определение. Несобственным интгералом первого рода функции y = f(x) на промежутке [a,$+\infty$) называется предел определенного интеграла на промежутке [a,b] при b $\to$ $+\infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Если существует конечный предел, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся.

В противном случае - расходящимся

Несобственный интеграл с бесконенчыми нижним и верхним пределами определяется через сумму

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

где c $\in \mathbb{R}$. Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если сходятся инитегралы в правой части равенства

9.2 Геометрический смысл сходящихся несобственных интегралов

Пусть y = f(x) непрерывна на [a,+∞) и f(x) ≥ 0, $\forall x \in [a, +\infty)$

Тогда $\int_a^b f(x)dx$ - площадь крволинейной трапеции с основанием [a,b], ограниченной сверху кривой y = f(x)

⇒ Если несобственный интеграл от y = f(x) по [a, +∞) сходистя и равен S, то полагают, что область, ограниченная Ox, кривой y = f(x) и прямой x = a имеет площадь S. В противном случае говорить о площади указанной области нельзя

Геометрически сходимость инетграла означает существование конечной площади под бесконечной кривой

9.3 Свойства несобственного интеграла первого рода

Переносятся некоторые свойства орпедленных интегралов

Кроме того, для несобсвенных инетгралов существует обобщение формулы Ньютона - Лейбница

Пусть F(x) - первообразная для f(x) на [a, +∞)

Тогда $\forall b \in [a, +\infty]$ имеем

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

$\Rightarrow \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} (F(b) - F(a))$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$

Обозначим $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(x)|_a^{+\infty}$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$

Формулу называют обобщением формулы Ньютона - Лейбница для несобственных интегралов по промежутку [a, +∞)

Сходимость несобственного интеграла I рода означает, что у первообразной существует предел на бесконечности ⇒ Если первообразная находися через элементарные функции, то можно найти такой предел (те вычислить несобственный интеграл) или же убедиться в отсутствии этого предела

9.4 Признаки сравнения

Теорема (1-й признак сравнения).

1. На полупрямой x$\geq$ a заданы две непрерывные функции y = $f_1(x)$ и y = $f_2(x)$
2. для любого $x \in [a, +\infty), 0 \leq f_(x) \leq f_2(x)$, то:
   (a) Если интеграл $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ сходящийся, то и интеграл $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ также сходящийся
   (b) Если интеграл $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ - расходящийся, то и интеграл $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ также расходящийся

Доказательство.

Тк $f_2(x) \geq f_1(x)$, то для любого b > a по свойствам определенного интеграла следует: $\int_a^b f_2(x)dx \geq \int_a^b f_1(x)dx$. Но интеграл $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ сходящийся, те $\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^{+\infty} f_2(x)dx$. Кроме того, с ростом b интеграл слева монотонно увеличивается, следовательно, существует $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f_1(x)dx$, те интеграл $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ сходится.

Второе утверждение является следствием доказанного.

Теорема (2-й признак срвнения)

Если на полупрямой x $\geq$ a заданы две неотрицательные функции y = f(x) и y = g(x) и сущствует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, причем k $\neq$ 0; ∞, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно

9.5 Абсолютно и условно сходящиеся интегралы

Определение. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$

Определение. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется условно сходящимся, если сам интеграл сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ - расходится

Теорема(об абсолютной сходимости интегралов)

Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ тоже сходится

10 Несобственный интеграл второго рода

Определение. Несобственным интегралом второго рода функции y = f(x) на промежутке [a,b) называется пределе определенного интеграла на промежутке [a, b - ϵ) при $\epsilon \to +0$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to +0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

Если существует конечный предел, интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется сходящимся

В противном случае - расходящимся

Вычисление инетграла сводится к вычислению предела

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to +0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx = \lim_{\epsilon \to +0} F(x)|_a^{b-\epsilon} = \lim_{\epsilon \to +0} (F(b-\epsilon) - F(a))$$

Если функция y = f(x) нерпрерывна на промежутке a < x $\leq$ b и имеет разрыва второго рода в точке x = a, несобственный интеграл второго рода определяется аналогично предыдущему

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{a|\epsilon}^b f(x)dx$$

Если функция y = f(x) имеет разрыв второго рода в точке x = c $c \in (a, b)$, несобственный интеграл второго рода на промежутке [a,b] определяется следующим образом

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1 \to +0} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \to +0} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x)dx$$

10.1 Признак сравнения

Теорема. Если на [a,b) определены и непреырны две функции, связанные неравенством $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$, и интеграл от большей функции сходится, то, следовательно, сходится и интеграл от меньшей функции. Аналогично, если интеграл от мешей функции расходится, то расходится и интеграл от большей функции.

Аналогично, вводятся понятия абсолютной и условной сходимости для несобственного интеграла II рода

11 Интегралы смешанного типа

Определение. Пусть функция f(x) определена на прямой $-\infty < x < +\infty$ и интегрируема на каждом сегменте, принадлежащем этой прямой.

Будем говорить, что функция f(x) интегрируема по Коши, если существует конечный предел

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \to +\infty} \int_{-B}^{+B} f(x)dx$$

В этом случае говорят, что интеграл 1 рода сходится в смысле главного значения

Утверждение. Если f(x) нечетна, то она интегрируема по Коши и главное значение равно нулю.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \to +\infty} \int_{-B}^{+B} f(x)dx = 0$$

Если f(x) четная, то она интегрируема по Коши титт, когда сходится несобственный интеграл

Доказательство.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{B \to +\infty} \int_{-B}^{+B} f(x)dx = 2 \lim\limits_{B \to +\infty} \int_{0}^{+B} f(x)dx$