МатАнал

Забродин Денис Александрович

16 сентября 2022 г.

Содержание

1 Матрицы

1.1 Основные понятия

Определение: Матрицы размера m*n называются совокупность элементов, записанных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots \\ a_2 & \dots \\ a_3 & \dots \end{pmatrix}$$

или

$$A = (a_{ij})$$

a_{ij} - элемент матрицы, находящийся на пересечении i-ой строки и j-го столбца.

Обозначение: $\mathbb{R}^{m*n}$ - множество всех матриц размера m*n, элементы которых - действительные числа

Определение: Если m = n, то A - квадратная матрица n-го порядка.

Определение: Элементы a_{ij}, где i = j, называются диагональными, а элементы a_{ij}, где i ≠ j - внедиагональными.

Определение: Матрица, все элементы которой равны 0, называются нулевой и обозначаются символом O

Определение: Квадратная матрица называется диагональной, если все ее внедиагональные элементы равны нулю

Определение: Диагональная матрица, все диагональные элементы которой единицы, называется единичной.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение: Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется треугольной, если $a_{ij} = 0$ при i < j (или i > j). Нижнетреугольная и верхнетреугольная соответственно.

Определение: Матрица $A^T = (a_{ij}^T) \in \mathbb{R}^{n*m}$ называется транспонированной для $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m*n}$, если $a_{ij}^T = a_{ij}$, $\forall i = 1, 2 \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$

Определение: Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется симметричной, если $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n (A = A^T)$

1.2 Алгебра матриц

Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ - матрицы m*n
$i = 1, 2 \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n$

Замечание: A = B $\Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\ \forall i = 1, 2 \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$

1. Сложение: A ± B = C = (c_{ij}), где $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$
2. Умножение: λ * A = C = (c_{ij}), где $c_{ij} = \lambda * a_{ij}$

Определение: Матрица -A = $(-a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m*n}$ называется противоположной матрицей для A = $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m*n}$

Определение: Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется кососимметричной, если $A^T = -A$

Свойства матриц:

1. A + B = B + A
2. (A + B) + C = A + (B + C)
3. A + O = O + A = A
4. A + (-A) = -A + A = O

1.3 Умножение матриц

Определение: Произведением матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m*n}$ на $B = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n*k}$ называется матрица $B = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m*k}$

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} * b_{sj}$$

Замечание: Матрицу A можно умножить на B, если эти матрицы согласованы (кол-во столбцов A = кол-ву строк B)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 * 1 + (-5) * 3 & 0 * 2 + (-5) * 4 \\ (-1) * 1 + 6 * 3 & (-1) * 2 + 6 * 4 \\ 3 * 1 + 2 * 3 & 3 * 2 + 2 * 4 \end{pmatrix}$$

1.4 Свойства умножения матриц

1. (A * B) * C = A * (B * C)
2. (A + B) * C = AC + BC; A * (B + C) = AB + AC
3. λ * (A * B) = (λ * A) * B = A * (λ * B)
4. В общем случае A * B $\neq$ B * A

1.4.1 Док-во 1-го св-ва

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m*n}, B \in \mathbb{R}^{n*p}, C \in \mathbb{R}^{p*r}$. Ясно, что тогда
$A(BC) \in \mathbb{R}^{m*r}, (AB)C \in \mathbb{R}^{m*r}$. Вычислим сначала матицу A(BC). Имеем:
$\{BC\}_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} b_{ij}c_{jk}, \quad i = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, r$
$\{A(BC)\}_{lk} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{li}\{BC\}_{ik} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p} a_{li}b_{ij}c_{jk}, \quad l = 1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, r$
Теперь вычислим (AB)C:
$\{AB\}_{lj} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{li}b_{ij}, \quad l = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, p$
$\{(AB)C\}_{lk} = \sum\limits_{j=1}^{p}\{AB\}_{lj}c_{jk} = \sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{li}b_{ij}c_{jk}, \quad l = 1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, r$

Мы видим, что правые час ти отличаются лишь порядком суммирования. Однако, поскольку значки суммирования i, j меняются независимо друг от друга, порядок суммирования безразличен. Итак, матрицы A(BC) и (AB)C поэлементно совпадают.

1.4.2 Док-во 2-го св-ва

(A + B)C = AC + BC
Пусть A = (a_{ij}); B = $(b_{ij}$; C = (c_{ij})

Обозначим A + B = D = (d_{ij}); $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Пусть (A + B)C = F = (f_{ij}) = D*C

$f_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} d_{ij} * c_{sj} = \sum\limits_{s=1}^{n}(a_{is} + b_{is}) * c_{sj} = \sum\limits_{s=1}^{n} a_{is} * c_{sj} + \sum\limits_{s=1}^{n} b_{is} * c_{sj} =$
$\{A * C\}_{ij} + \{B * C\}_{ij}$

Определение: Матрицы A и B называются перестановочными, если A*B = B*A

Определение: Матрицы A и B называются антиперестановочными, если A*B = -B*A

1.5 Свойства операции транспонирования

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(A^T)^T = A$

1.5.1 Док-во 3 св-ва

$(AB)^T = B^T A^T$ (равенство 1.1)

Пусть A $= (a_{ij})$ - m*n; B $= (b_{ij})$ - n*k $\Rightarrow$ A*B - m*k; $(AB)^T$ - k*m
$B^T = (b_{ji})$ - k*n; $A^T = (a_{ji})$ - n*m;
$B^T * A^T$ - k*m, т.е в правой и левой частях равенства 1.1 стоят матрицы одинакового размера

$$\{(AB)^T\}_{ij} = \{AB\}_{ji} = \sum_{s=1}^{n} a_{js} * b_{si} = \sum_{s=1}^{n} b_{si} * a_{js} = \sum_{s=1}^{n} b^T_{is} * a^T_{sj} = \{B^T A^T\}_{ij}$$

$\{B^T A^T\}_{ij}$ - элементы матрицы $(B^T A^T)$