МатАнал

Забродин Денис Александрович

25 ноября 2022 г.

Содержание

1 Производная

Рассм y = f(x), определенную в некоторой U(x) и принмающую действиные значения

Придадим арументу приращение Δx ⇒ функция получит приращение Δy:

$x \to x + \Delta x; y \to y + \Delta y$; здесь $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Рассм отношение: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ при Δx → 0

Определение: Производная функция f(x) в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аругмента стремится к нулю:

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Если функция y = f(x) имеет производную в точке x, то функция называется **дифференцируемой в этой точке**

Функция y = f(x), имеющая производную в каждой точке интервала (a;b), называется **дифференцируемой в этом интервале**.

Операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**.

Производная функция y = f(x) в прозвольной точке x обозначается y', f'(x), $\frac{dy}{dx}$

При каждом конкретном числовом значении x производная (если она существует при данном x) функции y=f(x) представляет собой число (Производная может быть как конечной, так и бесконечной).

Если для некоторого значения x $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что для этого значения x ∃ бесконечная производная

Если функция y = f(x) определена в левосторонней(прав) окрестности точки x_0 и сущ конечный или бесконечн предел этой функции $f'_{-}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то она наз соответственно конечной или бесконечной производной слева(справа) функции f(x) в точке x_0.

Если функция f(x) имеет производную в некоторой точке x = x_0, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во-первых, функция может иметь разрыв в точке x_0, а во-вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

Теорема: Если f(x) дифференцируема в точке x, то она непрерывна в точке x:

$$f(x) \in D(x) \Rightarrow f(x) \in C(x)$$

Доказательство: $f(x) \in D(x) \Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

По лемме функция отличается от предела на бм:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \Rightarrow \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}(f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x))\Delta x) = 0$$

Обратное не верно

Доказательство леммы:

Пусть $\lim f(x) = y_0$

По определению $\forall \varepsilon > 0$ в соответствующей области выполняется $|f(x)-y_0| < \varepsilon$. Обозначим $\alpha(x) = f(x) - y_0$. Тогда $|\alpha(x)| < \varepsilon$ и $\lim \alpha(x) = 0$

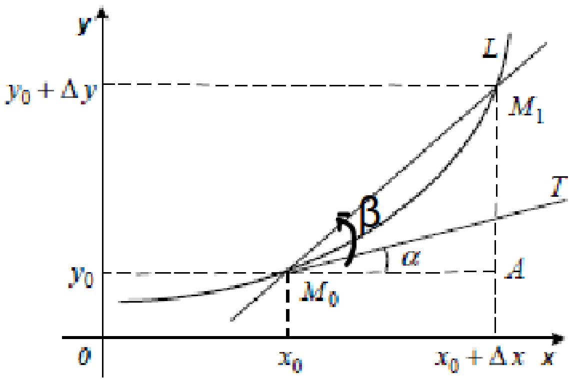
1.1 Геометрическпий смысл поизоводной

Утверждение: геометрический смысл производной состоит в том, что производная данной функции в данной точке есть тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику этой функции в данной точке, к положительному направлению оси абсцисс.

Доказательство:

Пусть f(x) определена на некотором промежутке (a,b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ - тангенс угла наклона секущей M_0M_1 к графику функции.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha = k$, где α - угол наколона касательной к графику функции f(x) в точке $(x_0, f(x_0))$, k - угловой коэффициент



Замечание: Если производная в точке равна ∞ то в этой точке касательная вертикаль

1.2 Уравнение касательной и нормали

Уравнение касательной: $y = kx + b \quad k = tg\alpha = f'(x_0) \quad y = f'(x_0) * x + b$

Число b найдем из услоыия, что точка $(x_0; f(x_0))$ лежит на прямой $b = f(x_0) - f'(x_0) * x_0$. Отсюда $y = f'(x_0) * x + f(x_0) - f'(x_0) * x_0 = f'(x_0) * (x - x_0) + f(x_0)$

$y = f'(x_0) * (x - x_0) + f(x_0)$ - уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке $(x_0; f(x_0))$

Уравнение нормали:

Нормаль - это прямая, проходящая через т $(x_0; f(x_0))$ и перепендикулярная касательной.

Две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ взаимно перпендикулярны ТИТТ, когда $k_1 * k_2 = -1$. Значит угловой коэффициент нормали равен: $k_2 = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Поэтому уравнение нормали N к графику функции y = f(x) в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} * (x - x_0)$$

1.3 Основные правила дифференцирования

Введем правила дифференцирования арифметических действий

1. y(x) = c $\Rightarrow$ y'(x) = (c)' = 0
2. Произовдная обладает свойстваවми линенйности: если u(x) и v(x) дифференцируемы в точке x, а c_1 и c_2 - константы, то $y' = (c_1u + c_2v)' = c_2u' + c_2v'$
3. (uv)' = u'v + uv'
4. $\frac{u}{v}' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Теорема: Пусть y = f(u); u = ϕ(x) - дифференцирукмые функции своих аргументов. Область значений функции u входит в область определения фукнции f.

Тогда $y'(x) = f'(u) * u'(x)$

Док-во:

Дадим x приращени Δx. Тогда u и y получат соответственно приращения Δu и Δy.

Предположим, что при Δx $\to$ 0 Δu не принимает значений, равных нулю. Тогда имеет место тождество

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Переходя в нем к пределу при Δx $\to$ 0, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Так как функция u = ϕ(x) дифференцируема, а следоваетльно, и непрерывна, то при Δx $\to$ 0 также и Δu $\to$ 0. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, $\lim\limits_{\Delta u} \frac{\Delta y}{\Delta u} y'_u$. Поэтому

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

2 Дифференцирование функций. Производная. Дифференциал

Утверждение: Если функция y = f(x) определена, монотонная в строгом смысле и непрерывна на некотором отрезке [a,b] $\in$ Ox, то на соответствующем отрезке [c,d] $\in$ Oy, изменения функции y = f(x) определена обратная функция x = g(y), которая на этом отрезке также строго монотонная и непрерывна; при этом f(g(y)) = y

2.1 Производная обратной функции

Теорема: Если функция y = f(x) строго монотонна на интервале (a;b) и имеет неравную нулю производную f'(x) в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция x = ϕ(y) также имеет производную ϕ'(y) в соответствующей точке, определяемую равенством ϕ'(y) = $\frac{1}{f'(x)}$ или $x'_y = \frac{1}{y'_x}$

Доказательство: Рассмотрим обратную функцию x = ϕ(y). Дадим аргументу y приращение Δy $\neq$ 0. Ему соответствует приращение Δx обратной функции, причём Δx $\neq 0$ в силу строгой монотонности функции y = f(x). Поэтому можно записать $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$. Если Δy $\to 0$, то в силу непрерывности обратной функции приращение Δx $\to 0$. И так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, тогда $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)} = \phi'(y)$

Производные обратных тригонометрических функций:

$y = arcsinx\ -1 \leq x \leq -1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = siny;$

$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(siny)'_y} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.2 Производная параметрически заданной функции

Пусть задана функция y = y(x) задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

где t - параметр, t $\in [t_1; t_2]$

Пусть функция x = x(t) на отрезке $[t_1; t_2]$ однозначна, монотонна в строгом смысле и непрерывна. Тогда у этой функции существует обратная функция t = X(x), те y = y(t) = y(X(t)) = y(x)

Пусть, кроме того, функция x(t) и y(t) дифференцируемы при t $\in [t_1; t_2]$

Тогда производная y'(x) найдется по формуле дифференцирования сложной функции: $y'_x = y'_t(t) * t'_x$

но по теореме о производной обратной функции имеем:

$t'_x(x) = \frac{1}{x'_t(t)}$

Таким образом, получает, что $y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$

2.3 Неявно заданная функция и ее производная

Если функция задана уравнением y = f(x), разрешенным относительно y, то функция заданная в явном виде.

Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения F(x;y) = 0, не разрешённого относительно y.

Всякую явно заданную функцию y = f(x) можно записать как неявно заданную уравнением f(x) - y = 0, но не наоборот.

2.4 Метод логарифмического дифференцирования

Пусть функция y(x) положительна и имеет конечную производную в данной точке x.

1. Прологарифмируем y = f(x)   lny = lnf(x)
2. Продифференцируем с учетом теоремы о производной сложной функции $(lnf(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ - логарифмическая производная
3. $f'(x) = f(x) * (lnf(x))'$

Эту формулу удобно применять в случае вычисления производных степенно-показательных функций, а также если производная от lny проще, чем производная от самой функции. Важно помнить, что при вычислении производной от lny нужно сначала использровать свойства логарифмов, а затем считать производную.

2.5 Производная показательно-степенной функции

Пусть u = f(x) и v = g(x) - функции, имеющие производные в точке x, f(x) > 0. Найдем производную функции y = u^v. Логарифмируя, получим: $lny = vlnu$.

$$\frac{y'}{y} = v'lnu + v\frac{u'}{u}; \quad y' = u^v(v\frac{u'}{u} + v'lnu) \Rightarrow (u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v v'lnu$$

Из этой формулы видно, что производная степенно-показательной функции состоит из двух слагаемых: первое получается, если считать функцию показательной, а второе - степенной.

3 Дифференциал

3.1 Определение функции, дифференцируемой в точке, и дифференциала

Пусть функция y = f(x) определена в U(x).

Дадим приращение аргументу ⇒ приращение функции

$x + \Delta x \Rightarrow y + \Delta y$

Определение: Если приращение функции можно представить в виде $\Delta y = A(x) * \Delta x + \alpha(\Delta x)$, где A(x) не зависит от Δx, а $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\Delta x)$, то функция y = f(x) называется дифференцируемой в U(x), а выражение A(x) * Δx называется дифференциалом и обозначается dy = A(x)*Δx

Приращение отличается от дифференциала на б.м

$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \Rightarrow \Delta y - dy = \alpha(\Delta x)$ - бм $\Rightarrow \Delta y \approx dy$

Если A(x) $\neq 0$, то дифференциал есть главная линейная часть приращения.

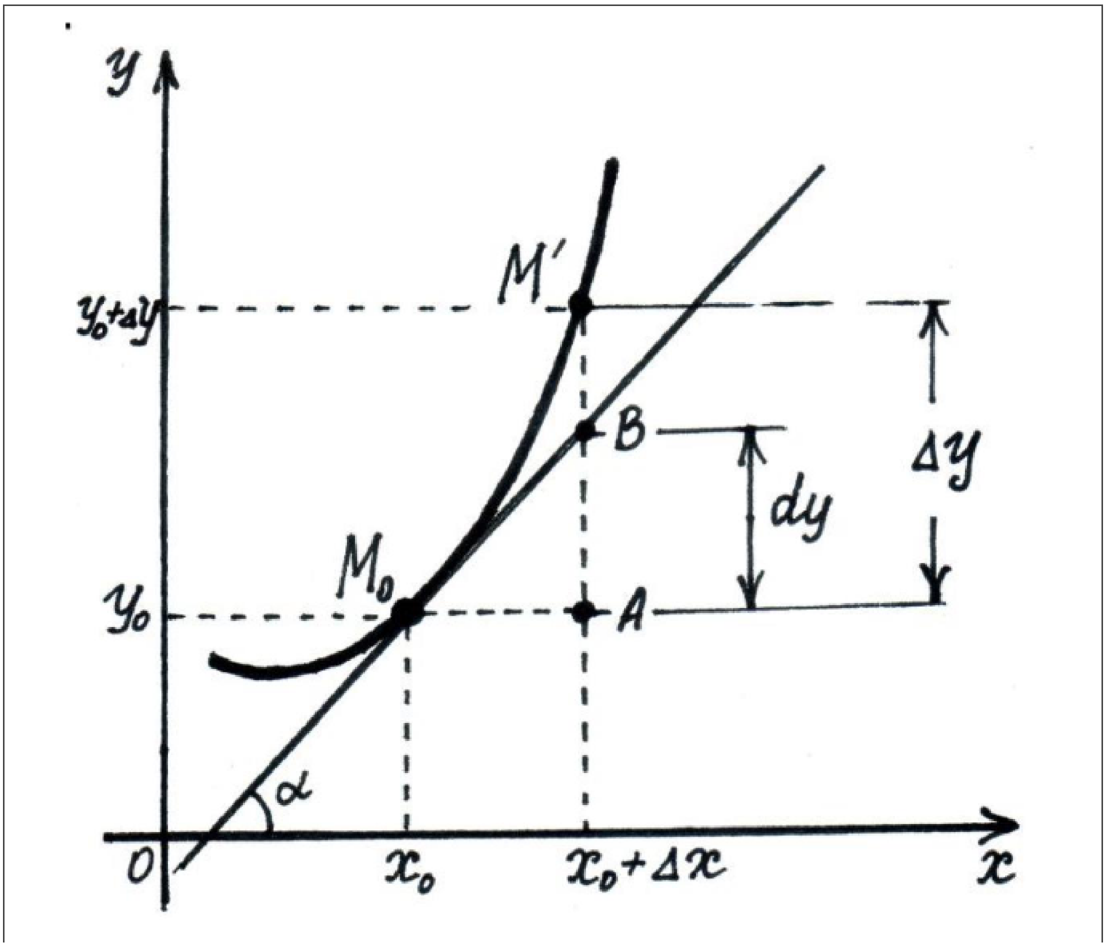
Пример:

$y = x^2$

$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \Rightarrow dy = 2x\Delta x$

3.2 Геометрический смысл дифференциала

Если функция y = f(x) дифференцируема в точке x_0, то dy = y'(x_0)*Δx = tgα * Δx = AB, те дифференциал геометрически изображает приращение ординаты касательной, проведённой к точке M_0:



Связь определения дифференцируемой функции, данного через производную, с определением дифференцируемой функции, данным чрез приращения.

Ранне говорилось, что функция, обладающая производной в этой точке, дифференцируема в этой точке. Докажем эквивалентность этих двух определений

Пусть Δy можно представить в виде Δy = A(x) * Δx + $\alpha(\Delta$x). Разделим на Δx и перейдем к пределу при Δx $\to$ 0:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{A(x)*\Delta x + \alpha(\Delta x)}{\Delta x} = A(x) + 0 \Rightarrow y'(x) = A(x)$, те из определения, данного выше $\Rightarrow$ существование производной $\frac{dy}{dx}$

Обратно: если $\exists y'(x)$, те $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то, следовательно, по лемме имеем:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha_1(\Delta x) \Rightarrow \Delta y = y'(x) * \Delta x + \alpha_1(\Delta x) * \Delta x \Rightarrow \Delta y = y'(x) * \Delta x + \alpha(\Delta x) = y'(x) * \Delta x + \bar{o}(\Delta x)$, те приращение имеет нужный вид.

Таким образом, дифференциал равен dy = y'(x) * Δx или, положим Δx = dx, dy = y'(x)*dx, те y'(x) = $\frac{dy}{dx}$ - производная равна отношению дифференциалов.

4 Дифференциал сложной функции.Инвариантность формы первого дифференциала

Если y = F(u) и u = u(x) - дифференцируемые функции своих аргументов, то сложная функция y = F[u(x)] = y(x) также дифференцируема по x, а ее дифференциал определяется по формуле dy = $F'_u(u)du$.

Действительно, dy = $y'_x(x)dx = [F'_u(u) * u'_x(x)]dx = F'_u(u) * du$

Таким образом, дифференциал сложной функции равен произведению производной $F'_u(u)$ на дифференциал аргумента u, что по форме совпадает с выражением для дифференциала простой функции y = f(x)

Это свойство I - ого дифференциала сохранять свою форму независимо от того, является ли функция простой или сложной функцией своего аргумента, называется инвариантностью

Инвариантность дифференциала заключается в том, что дифференциал всегда можно записать в одном и том же виде - произведение производной по некоторой переменной на приращение этой переменной - независимо от того, будет эта переменная независимой переменной или функцией от какой то другой переменной.

4.1 Привила вычисления дифференциала

1. если y = C = const, то dC = 0
2. $d(C_1 * u(x) + C_2 * v(x)) = C_1du(x) + C_2dv(x)$
3. $d(u(x) * v(x)) = v(x) * du(x) + u(x) * dv(x)$
4. $d(\frac{u(x)}{v(x)}) = \frac{v(x)*du(x) - u(x)*dv(x)}{v^2(x)}$

Докажем, например, формулу 3: $d(u(x) * v(x)) = v(x) * du(x) + u(x) * dv(x)$

Доказательство:

Пусть y = u*v

Следовательно, $dy = y'dx = (u * v)'dx = (u'v + v'u)dx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv$

4.2 Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Пусть f(x) дифференцируема в точке x_0, те $f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f'(x_0)*\Delta x+o(\Delta x)$

При малых Δx последенее слагаемое мало по сравнению с Δx, те Δf ∼ df при Δx → 0, поэтому Δf ≈ $f'(x_0) * \Delta x$. Отсюда следует формула приближенных вычислений значений функции:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

5 Исследование по первой производной

5.1 Условия постоянства, убывания и возрастания функции

Теорема: Пусть функция f(x) определена и непрерывна на некотором промежутку X, и в каждой внутренней точке этого промежутка существует конечная производная. Тогда функция f(x) постоянная на X тогда и только тогда, когда f'(x) = 0 в любой внутренней точке промежутка X.

(то есть $\forall x \in X \quad f(x) = C \Leftrightarrow \forall x \in X^\circ \quad f'(x) = 0$, где X° - множество внутренних точке X)

Необходимость. По условию f(x) = C, а производная от константы равна нулю.

Достаточность. Пусть a ∈ X - фиксированная точка из промежутка X. Возьмем произвольную точку x из X. Тогда на отрезке [a,x] выполняются условия теоремы Лагрнжа. Поэтому между точками a и x найдется такая точка c, что f(x) - f(a) = f'(c)·(x-a). Так как по условию f'(c) = 0, то f(x) = f(a) $\forall x \in X$. Таким образом, функция f постоянна на промежутке X, и ее значение равно f(a). ЧТД

5.2 Условия монотонности функции на промежутке

Теорема.(Критерий нестрого монотонности)

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на промежутке X, дифференцируема в любой точке внутренности X° этого промежутка. Тогда f(x) - неубывающая на X $\Leftrightarrow \forall x \in X^\circ \quad f'(x) \geq 0$

Необходимость. Пусть x - произвольная внутренняя точка из X. Тогда, по определению производной, f'(x) = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Так как f(x) - неубывающая, то приращение $f(x+\Delta x) - f(x)$ будет

$$\begin{cases} \leq 0 & \text{при } \; x < 0 \\ \geq 0 & \text{при } \; x > 0 \end{cases}$$

Поэтому $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad \forall x \neq 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при Δx → 0, получаем f'(x)≥0. ЧТД

Достаточность. Возьмем любые две точки $x_1, x_2 \in X$, такие что $x_1 < x_2$. Тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ функция f удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Поэтому существует точка $c \in (x_1, x_2)$, такая что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Так как $f'(c) \geq 0$, и $(x_2 - x_1) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Следовательно, $f(x_1) \leq f(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$. Значит, по определению, функция неубывающая. ЧТД

Теорема(Критерий строгой монотонности)

Пусть функция f определена и непрерывна напромежутке X, дифференцируема на X°. Тогда f(x) строго возрастет $\Leftrightarrow$

1. $\forall x \in X^\circ \quad f'(x) \geq 0$
2. множество решений уравнения f'(x) = 0 не содержит интервалов

Необходимость.

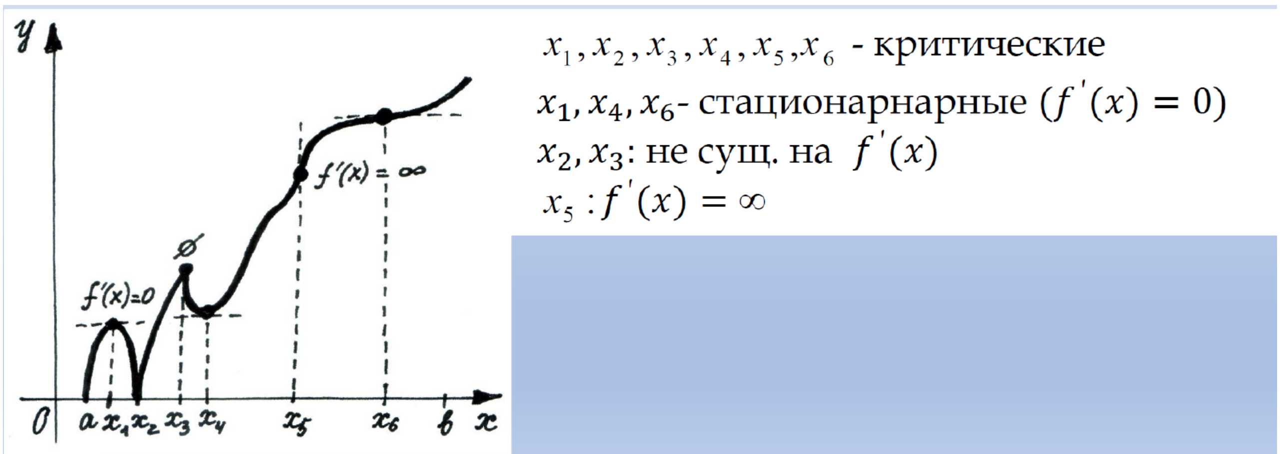
1. Если f строго возрастает, то она, тем более, является неубывающей. Значит, по предыдущей теорема, $\forall x \in X^\circ \quad f'(x) \geq 0$
2. Покажем теперь, от противного, что множество решений уравнения f'(x) = 0 не содержит интервалов. Если это множество содержит интервал (a,b), где a < b, то $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$. Тогда, из условия постоянства функции на промежутке, f постоянная на [a,b]. А это противоречит ее строгому возрастанию.

Достаточность. Так как $\forall x \in x^\circ \quad f'(x) \geq 0$, то, по предыдущей теореме, f(x) - неубывающая на X. Значит $\forall x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполнено

$f(x_1) \leq f(x_2)$. Покажем, что здесь возможно только строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Действительно, если $f(x_1) = f(x_2)$, то в силу неубывания f, будет $\forall x_1 < x < x_2$ выполнено $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(x_1)$. Значит, $f(x) = f(x_1)$ на интервале (x_1, x_2), то есть f'(x) = 0. Это противоречит условию теоремы. Следовательно, функция f строго возрастает.

Определение: Точки x: f'(x) = 0 называются **стационарными**

Определение: Точки x: f'(x) = 0 или f'(x) = ∞ называются критическими точками I рода. Точки, x: $\nexists$ f'(x) называются критическими точками II рода.



Замечание. Все стационарные точки функции являются, конечно, и критическими.

5.3 Локальный экстремум

Определение. Точка x_0 называется точкой **локального максимума** функции y = f(x), если $\exists \delta > 0$, что $\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) > f(x)$

Точкой x_0 называется точкой **локального минимума** функции y = f(x), если $\exists \delta > 0$, что $\forall x : |x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x_0) < f(x)$

Определение. Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Теорема(Необходимое условие экстремума)

Если x_0 - экстремум функции f(x), то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0) = \infty$ или $f'(x_0)$ не сущ.

Другими словами, экстремум ищется в критических точках функции.

Доказательство.

Если $\exists f'(x)$и $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$, то функция возрастает или убывает, и экстремума быть не может.

Замечание: Эта теорема, однако, не дает достаточного условия существования экстремума. Так на приведенном выше рисунке $x_1, x_2, ..., x_6$ - критические, но в точках x_1, x_2, x_3, x_4 - экстремум; а в точках x_5, x_6 - экстремума нет.

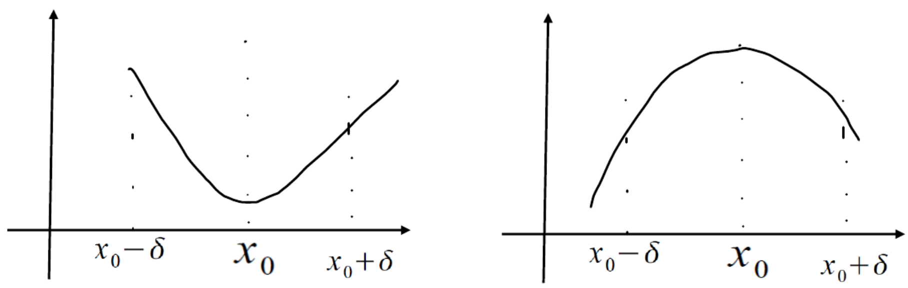
Теорема(Первое достаточное условие экстремума)

Пусть существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, такая что:

1. функция f определена и непрерывна в $U(x_0)$
2. дифференцируема в $U(x_0)$, кроме, быть может, самой точки x_0

Тогда:

1. если производная в точке x_0 меняет знак с $+$ на - (то есть $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) f'(x) \geq 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad f'(x) \leq 0$), то x_0 - точка (нестрогого локального) максимума;
2. если производная в точке x_0 меняет знак с - на $+$ (то есть $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) f'(x) \leq 0$, и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad f'(x) \geq 0$), то x_0 - точка (нестрогого локального) минимума



Доказательство проведем лишь для пункта 1), так как пункт 2) доказывается аналогично. По критерию нестрррогой монотонности функции:

так как $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f'(x) \geq 0$, то f(x) - неубывающая на $(x_0 - \delta, x_0]$. Поэтому $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0] \quad f(x) \leq f(x_0)$;

Соответственно так как $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad f'(x) \leq 0$, то f(x) - невозрастающая на $[x_0, x_0 + \delta)$. Поэтому $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta) \quad f(x_0) \geq f(x)$

Следовательно, $\forall x \in U(x_0) \quad f(x) \leq f(x_0)$. По определению это значит, что x_0 - точка (нестрогого локального) максимума.ЧТД

Замечание: Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в этой точке нет экстремума.

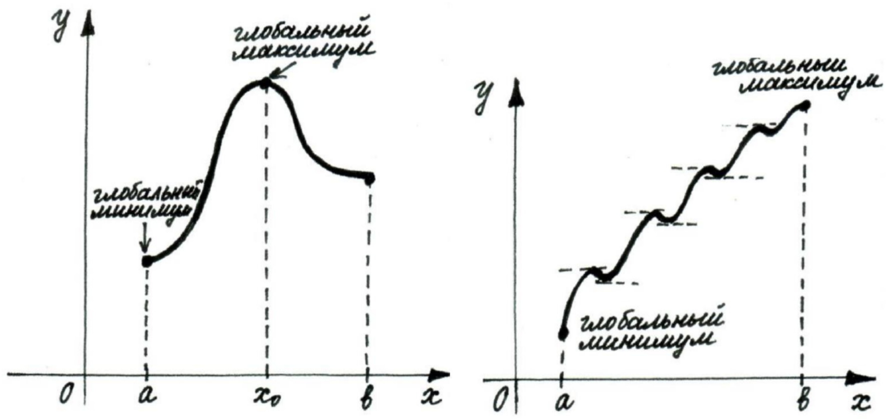
Итак, алгоритм отыскания экстремумов функции y = f(x) на интервале (a,b).

Пусть y = f(x) - непрерывна на конечном или бесконечном интервале (a,b)

1. Найти f'(x)
2. Найти все действительные корни уравнения f'(x) = 0
3. Найти все точки x: f'(x) = ∞ или не сущ. f'(x)
4. На оиси Ох отметить все критические точки и составить схему изменения знака f'(x) в интервалах между ними.
5. На основании схемы точек сделать вывод о хар-ре критических точек, построить схему графика функции.

5.4 Задачи на отыскание экстремумов

Рассмотрим функцию y = f(x), определенную и непрерывную на отрезке [a,b]. В силу теорему Вейерштрасса непрерывная функция достигает в некоторой точке своего наибольшего (наименьшего) значения. Оно достигается либо во внутренней точке отрезка и тогда оно совпадает с одним их локальных экстремумов, либо в одном из концов отрезка [a,b]



Итак: для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции f(x) на [a,b] сравниваются между собой значения f(x) во всех точках локального экстремума и в граничных точках отрезка и выбирается наибольшее (наименьшее).

Пример: Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = sin(x^2)$ на $[-\sqrt{\pi}; \frac{\sqrt{5\pi}}{2}]$

$y' = 2xcos(x^2)$

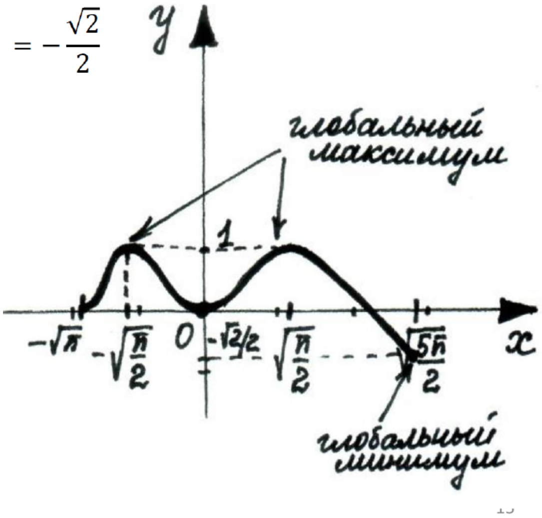
$y' = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{2}$

Сравним значения в эти точках со значениями на концах отрезка:

$$f(0) = 0; \quad f(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = 1; \quad f(-\sqrt{\pi}) = 0; \quad f(\frac{\sqrt{5\pi}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow f_{max}$в $x = \pm\frac{\pi}{2}$(во внутр. точках)

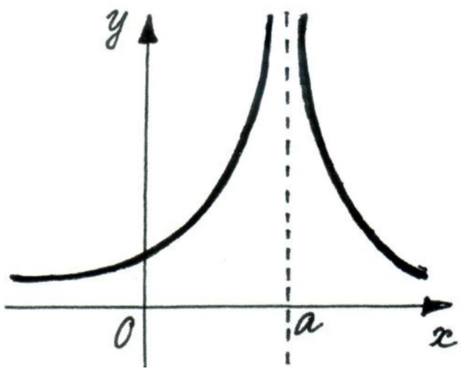
$f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ в x = $\frac{\sqrt{5\pi}}{2}$(на границе)



5.5 Асимптоты

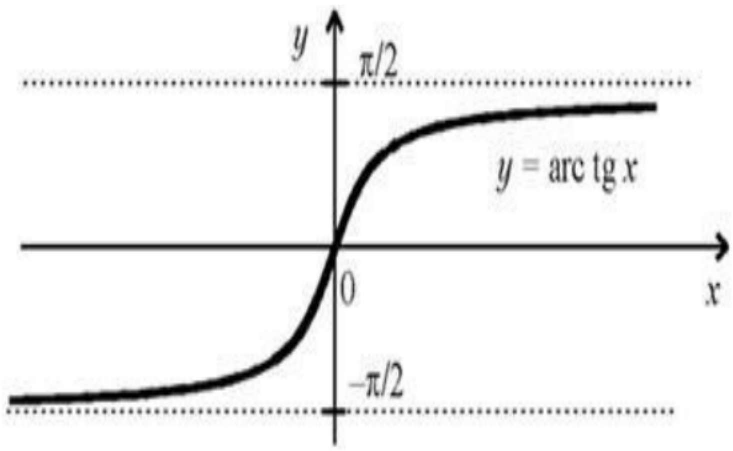
Асимптотой графика функции y = f(x) называется такая прямая, что расстояние мужду точками этой прямой и кривой графика функции стремится к нулю, когда точка по кривой неограниченно удаляется в бесконечность.

Прямая x = a называется вертикальной асимптотой графика функции y = f(x), если в точке a существует предел этой фукнции, равный бесконечности: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ (или x $\to$ a+, x $\to$ a-; $\lim f(x) = +\infty, = -\infty$)

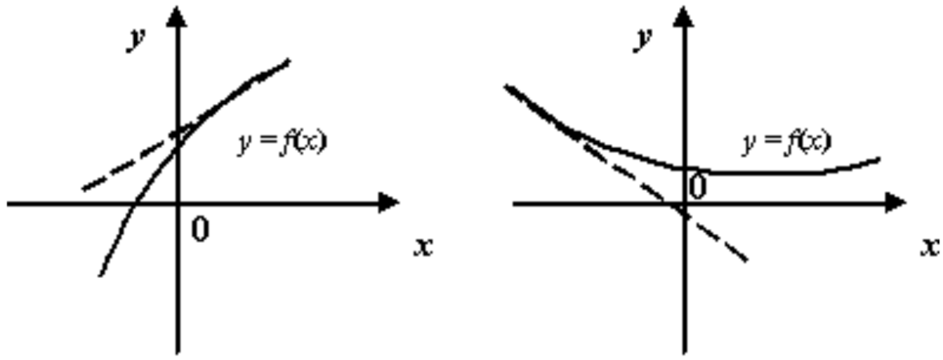


Замечание: Из определения видно, что вертикальные асимптоты обязательно проходят через точки разрыва второго рода.

Прямая y = b наызвается горизонтальной асимптотой графика функции y = f(x), если при x $\to \infty$ (а также при x $\to +\infty$ и при x $\to$ -∞) существует предел этой функции, равный b: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ (или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$)



Определение: Прямая y = kx + b называется наклонной асимптотой к графику y = f(x) при x→ +∞, если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0$



Теорема: Прямая y = kx + b - наклонная асимптота к графику y = f(x) при x → ∞ ⇔ 1) k = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}$, и 2) b = $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)\in\mathbb{R}$

Доказательство:

Необходимость. Пусть y = kx + b - асимптота к графику y = f(x) при x → ∞. Тогда, по определению асимптоты, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$. Отсюда получаем: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-kx-b}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{k}-k=0$. Поэтому k = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

Равенство b = $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$ вытекает из определения асимптоты

Достаточность. Если k - конечное действиетльное число, и b = $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$, то тогда $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$. Значит, по определению, y = kx + b - наклонная асимптота к графику y = f(x)

Замечание. Так как коэффициенты k и b вычисляются однозначно, то при x $\to +\infty$ и при x $\to$ -∞ может быть не более чем по одной наклонной асимптоте.