МатАнал

Забродин Денис Александрович

16 октября 2022 г.

Содержание

1 Определители

1.1 Перестановки

Определение: Упорядоченная совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, в которой:

1. $\alpha_i \in \{1, 2, \ldots, m\}, i = 1, 2, \ldots, n; n \leq m$
2. $\alpha_i \neq \alpha_j$ при j $\neq$ i

Обозначение: $\sigma = (\alpha_1, \alpha 2, \ldots, \alpha_n)$ - перестановка из чисел $\alpha_1, \alpha 2, \ldots, \alpha_n$

Определение: В перестановке $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ пара компонентов (α_i, α_j) образуют инверсию (т.е беспорядок), если большее из них предшествует меньшему т.е $a_i > a_j$, при i < j

Обозначение: p(σ) - число инверсий в перестановке σ

Определение: Перестановка σ называется четной(нечетной), если p(σ) - четное(нечетное)

Теорема: Если в перестановке σ поменять местами два произвольных компонента, то ее четность изменится на противоположное

Доказательство: *I случай: Меняем местами два рядом стоящих компонента*

$\sigma = (\alpha_1, \ldots \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$
$\sigma' = (\alpha_1, \ldots \alpha_{k+1}, \alpha_k, \ldots, \alpha_n)$

Пара компонентов (a_i, a_j), где i и j отличны от k и k+1, образовывают или не образовывают инверсию в перестановке σ и σ' одновременно

Пары (α_k, α_{k+1}) и (α_{k+1}, α_k) в одной перестановке образуют инверсию, а в другой - нет $\Rightarrow$ их четность различна

II случай: Пусть между пары a_i и a_j расположены k чисел

$\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, a_{i+k}, a_j, \ldots, \alpha_n)$
$\sigma\text{'} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \alpha_{i+1}, \ldots, a_{i+k}, a_i, \ldots, \alpha_n)$

Перестановка σ' полученная из σ, последовательно меняя местами следующие числа: a_i меняем местами k+1 раз с числами $a_{i+1} \ldots, a_{i+k}$ a_j, а затем a_j меняем местами k раз с числами $a_{i+k}, \ldots, a_{i+1}$

При этом четность перестановки изменится 2k+1 раз

1.2 Определители

Определитель - квадратная матрица A = (a_{ij}) называется число:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots \\ \dots \end{vmatrix} = \sum_{\sigma=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} (-1)^{p(\sigma)} * \alpha_{1\alpha_1} * \alpha_{2\alpha_2} * \alpha_{n\alpha_n} (2.1)$$

(2.1) - сумма всевозможных произведений элементов матрицы, взятые по одому из каждой строки и каждого столбца причем эти произведения берутся со знаком $(-1)^{p(\sigma)}$. Суммирование осуществляется по всевозможным перестановкам $\sigma = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ из чисел 1, 2 ... n
A = (α_{11}) |A| = α_{11}

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

1.3 Свойства определителей

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta 2 \\ \dots \end{vmatrix}$$

1. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

2. Если все элементы какой-либо строки или столбца определителя - нули, то определитель равен нулю.

3. Определитель квадратной матрицы не меняемся при ее транспонировании, т.е $|A| = |A^T|$
   Замечание: из свойства 3 $\Rightarrow$ что строки и столбцы равнозначны с точки зрения свойств определителя $\Rightarrow$ свойства определителя для строк, справедливы и для столбцов

4. Если в матрице поменять местами 2 строки или 2 столбца, то знак ее определителя поменяется на противоположный
   Доказательство для строк:

Пусть даны исходный и преобразованный определитель:

$$d = \begin{vmatrix} \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{vmatrix}, \quad d' = \begin{vmatrix} \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{vmatrix}$$

Определитель d' получается из определителя d перестановкой i-ой b j-ой строк (точками обозначены все остальные строки, которые в d и d' совпадают)

Определитель d есть алгебраическая сумма n! произведений вида:
$a_{1\phi_1} * \dots * a_{i\phi_i} * \dots * a_{j\phi_j} * \dots * a_{n\phi_n}$ (13)

Где в каждое произведение входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца определителя d, со знаком равным знаку подстановки:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \phi_1 & \dots & \phi_i & \dots & \phi_j & \dots & \phi_n \end{pmatrix}$$

Так как сомножители произведения (13) также находятся по одному в каждом столбце и каждой строке определителя d', то каждое произведение определителя d ходит в определитель d'. Отсюда, так как количество слагаемых в d и d' одинаково, следует, что d и d' состоят из одних и тех же произведений, Для того, чтобы показать, что d = -d', достаточно показать, что каждое произведение (13) определителях d и d' имеет противоположные знаки. Знак произведения (13) в определителе d' равен знаку подстановки:

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ \phi_1 & \dots & \phi_j & \dots & \phi_i & \dots & \phi_n \end{pmatrix}$$

(учитываем, что элемент $a_{i\phi_i}$ лежит в определителе d' в j-ой строке в ϕ_i-ом столбце, элемент $a_{j\phi_j}$ - в i-ой строке и в ϕ_j-ом столбце). У подстановок ϕ и ψ совпадают вторые строки, а первая строка подстановки ψ Получена из первой строки подстановки ϕ транспозицией элементов i и j. Поэтому подстановки ϕ и ψ имеют противоположную четность и знак Отсюда образом произведение (13) входит в определители d и d' с противоположным знаком. Таким образом определители d и d' суммы одних и тех же произведений, но с противоположными знаками

5. Определитель матрцы, имеющий 2 одинаковые строки или 2 одинаковых столбца равен нулю

Доказательство: Пусть задан определитель |A| с 2 одинаковыми строками. Пусть этот определитель равен x. Поменяем местами эти 2 одоинаковые строки и получим определитель |B|. Согласно 4 свойству |B|=-x. Но тк мы поменяли две один строки в определителе |A|, то определитель не изменится |A| = |B| $\Rightarrow$ x = -x $\Rightarrow$ 2x = 0 $\Rightarrow$ x = 0

6. При умножении строки или столбца матрицы на число, ее определитель умножается на это число. Это является следствием определения определителя: тк каждое слагаемое суммы входит 1 раз и его можно вынести за скобки

7. Определитель с пропорциональными строками или столбцами равен нулю

8. Если каждый элемент некоторой строки или столбца определителя представить в виде суммы двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы 2-х определителей
Доказательство:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$|A| = \sum\limits_{\phi}(-1)^{p(\phi)} a_{1\phi_1} * \dots * a_{i\phi_i} * \dots * a_{n\phi_n} = \sum \phi(-1)^{p(\phi)} a_{1\phi_1} * \dots * (b_\phi + c_\phi) * \dots * a_{n\phi_n} = \sum\limits_{\phi}(-1)^{p(\phi)} a_{1\phi_1} * \dots * b_\phi * \dots * a_{n\phi_n} \quad + \quad \sum\limits_{\phi}(-1)^{p(\phi)} a_{1\phi_1} * \dots * c_\phi * \dots * a_{n\phi_n}$

9. Если к одной строке(столбцу) определителя прибавить другую строку(столбец), умноженную на любое число, то определитель не изменится
Доказательство:

$$|A| = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_i \\ b_j \\ b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_i \\ b_j + kb_i \\ b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_i \\ b_j \\ b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 \\ b_i \\ kb_i \\ b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_i \\ b_j \\ b_n \end{vmatrix} = |A|$$

2 Методы вычисления определителей

1. Приведение к треугольному виду

2. Понижение порядка

3 Миноры и Алгебраические дополнения

Теорема об определителе с нулевым углом

$$|D| = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & A & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ c_{k+1,1} & \dots & c_{k+1,k} & b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \dots & C & \dots & \dots & B & \dots \\ c_{k+l,1} & \dots & c_{k+l,k} & b_{l1} & \dots & b_{ll} \end{pmatrix} = |A| * |B|$$

Доказательство:
$|D| = \sum\limits_{\sigma=(i_1,\dots,i_k,k+j_1,\dots,k+j_l)} (-1)^{p(\sigma)} a_{1i} * \dots * a_{ki_k} * b_{1j_1} * \dots * b_{lj_l}$
$|A|*|B| = \sum\limits_{\sigma_1=(i_1,\dots,i_k)} (-1)^{p(\sigma_1)} a_{1i_1}, \dots, a_{ki_k} * \sum\limits_{\sigma_2=(j_1,\dots,j_l)} (-1)^{p(\sigma_2)} b_{1j_1} * b_{lj_l} = \sum\limits_{\sigma_1\sigma_2} (-1)^{p(\sigma_1)+p(\sigma_2)}$
$a_{1j_1} * \dots * a_{ki_k} * b_{1j_1} * \dots * b_{lj_l}$
$i_p \le k \Rightarrow i_p < k + j_q \quad \forall p = 1, \dots, k; q = 1, \dots, l \Rightarrow$ любые пары компонентов вида $(i_p, k + j_q)$ инверсий не образуют $\Rightarrow$ p(σ) = p(σ_1) + p(σ_2) $\Rightarrow$ |D| = |A| * |B| чтд

Определение: Минором M_{ij} называется определитель, полученный из определителя |A| при вычеркивании i-той строки и j-го столбца
Пример:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \end{vmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

Определение: A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij}

Определение: $A_{ij} = (-1)^{i+j} * M_{ij}$

Теорема Если все элементы k-го столбца(строки) определителя D, кроме, быть может, одного,a_{ik}, равны нулю, то определитель D равен произведению a_{ik} на алгебраическое дополнение этого элемента:

$$D = a_{ik} A_{ik}$$

Доказательство: Рассмотрим сначала частный случай, когда в определителе D все элементы первого столбца, кроме a_{11}, равны нулю:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

В каждый член определителя D входит в точности по одному элементу из первого столбца; но так как все эти элементы, отличные от a_{11}, равны нулю, то в определителе D все те члены, в которые из первого столбца входит не a_{11}, а какой-либо другой элемент, равны нулю.Следовательно,

$$D = \sum_{\phi=(1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{p(\phi)} a_{11} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}$$

где индексы $i_2, \ldots, i_n$ принимают значения 2,3,...,n. Множитель a_{11} является общим для всех слагаемых, поэтому его можно вынести за знак суммы. С другой стороны, так как единица, стоящая на первом месте, не образует ни одной инверсии, то $(1, i_2, \ldots, i_n) = (i_2, \ldots, i_n)$, и значит,

$$D = a_{11} \sum_{\phi=(i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{p(\phi)} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}$$

где суммирование распространяется на всевозможные перестановки $i_2, \ldots, i_n$ чисел 2,3, ..., n. А тк сумма

$$\sum_{\phi=(i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{p(\phi)} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}$$

равна определителю (n — 1)-го порядка, получающемуся из D вычеркиванием первой строки и первого столбца, т. е. равна M_{11}, и $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$, то $D = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$

Рассмотрим теперь общий случай, когда все элементы k-го столбца определителя D, кроме a_{ik} равны нулю,т, е, когда определитель имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & 0 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Переместим i-ю строку определителя D на первое место, последовательно меняя ее местами с (i-1)-й,(i-2)-й, и т. д., наконец, с первой строкой. На это потребуется i-1 транспозиций строк, при каждой из которых определитель умножается на -1. Затем переместим k-й столбец определителя D на первое место, последовательно меняя его местами с (k-1)-м, (k-2)-м,и т. д., наконец, с первым столбцом. Для этого потребуется k-1 транспозиций столбцов, при каждой из которых определитель тоже умножается на -1. В конечном счете мы получим определитель

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{i1} & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

отличающийся от определителя D только знаком $(-1)^{i-1} * (-1)^{k-1} = (-1)^{i+k}$. Но, как мы показали,определитель D_1 равен произведению a_{ik} на определитель(п—1)-го порядка, получающийся из D_1 вычеркиванием первого столбца и первой строки, или, что то же самое, получающийся из D вычеркиванием k-го столбца и i-й строки, т, е,

$$D_1 = a_{ik} M_{ik}$$

и, следовательно,

$$D = (-1)^{i+k} D_1 = (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = a_{ik} A_{ik}$$

Теорема (о разложении определителя по строке и столбцу): определитель равен сумме произведений элементов какой-либо его строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

(3.1) $|A| = a_{i1} * A_{i1} + a_{i2} * A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * A_{ij}$

(3.2) $|A| = a_{1j} * A_{1j} + a_{2j} * A_{2j} + \dots + a_{nj} * A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

(3.1) - разложение определителя по строке
(3.2) - разложение определителя по столбцу

Доказательство:
Для доказательства заметим прежде всего,что если два определителя отличаются друг от друга только элементами одного столбца (строки), то алгебраические дополнения элементов этих столбцов (строк)в обоих определителях одинаковы, так как при вычислении этих дополнений столбцы (строки), которыми отличаются определители, вычеркиваются.

Докажем теперь для определителя D справедливость, например, разложения по k-му столбцу. Для этого представим его в следующем виде:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} + 0 + \dots + 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 + a_{2k} + \dots + 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 + 0 + \dots + a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(здесь каждый элемент k-го столбца представлен в виде суммы n слагаемых, n-1 из которых равны нулю).

$$D = D_1 + D_2 + \dots + D_n$$

где

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель, D_1 равен произведению элемента a_{1k} на его алгебраическое дополнение в этом определителе. Однако так как определитель D_1 лишь k-м столбцом отличается от определителя D, то это алгебраическое дополнение совпадает с алгебраическим дополнением A_{1k} элемента a_{1k} в определителе D:

$$D_2 = a_{2k}A_{2k}, \quad \dots, \quad D_n = a_{nk}A_{nk}$$

Мы доказали, что

$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}$$

Соответствующее равенство для строк легко получается переходом к транспонированному определителю.

Теорема (О фальшивом разложении определителя): Сумма произведений элементов кака-либо строки(столбца) определителя на алгебраическое дополнение к элементам другой его строки(столбца) равна нулю

Доказательство:

Пусть дан определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Рассмотрим другой определитель, D_1 отличающийся от D лишь тем, что в k-м его столбце повторен i-й столбец:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель D_1 равен нулю, как определитель с двумя одинаковыми столбцами.Разложив его по элементам k-то столбца, получим

$$D_1 = a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \dots + a_{ni}A_{nk}$$

где A_{jk} — алгебраические дополнения элементов k-го столбца определителя D_1; но так как определитель D_1 лишь k-м столбцом отличается от D, то они будут и алгебраическими дополнениями элементов k-го столбца определителя D. Таким образом, при всех i и k $\neq$ i

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \dots + a_{ni}A_{nk} = 0$$

Аналогично, при всех i и k $\neq$ i

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0$$

Теорема: Определитель производных квадратных матриц равен произведению их определителей $|A * B| = |A| * |B|$

Доказательство:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ & A & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & & & & B & \\ 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = |A| * |B|$$

= [Обнулим правый нижний угол]

$$= \begin{vmatrix} [] & [] & [] & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1n}b_{nn} & \\ [] & A & [] & \dots & A * B & & \\ [] & [] & [] & a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nn}b_{n1} & & a_{n1}b_{1n} + \dots + a_{nn}b_{nn} & \\ -1 & \dots & 0 & & [] & [] & [] \\ & & & & [] & 0 & [] \\ 0 & \dots & -1 & & [] & [] & [] \end{vmatrix} =$$

= [переставляем местами столбцы] =

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} [] & [] & [] & [] & [] & [] \\ [] & A * B & [] & [] & A & [] \\ [] & [] & [] & [] & [] & [] \\ [] & [] & [] & -1 & \dots & 0 \\ [] & 0 & [] & \dots & \dots & \dots \\ [] & [] & [] & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n * (-1)^n * |A * B| = |A * B|$$

4 Метод мат индукции

Пусть требуется доказать, что некоторое утверждение A(n) зависит от натурального n, выполняется для $\forall n \in \mathbb{N}$ Пусть выполняется следующие 2 условия:

1. A(1) - верно
2. Из условия что A(k) - верно следует истинность утв A(k+1)

Тогда согласно принципу МИ утверждение A(n) верно для всех натуральных n
Теорема: определитель матрицы не меняется при ее транспонировании

Доказательство: Используем ММИ по порядку матриц:

1. Для $n = 1 \quad A = (a_{11}) \;\; A^T = (a_{11}) \Rightarrow |A| = |A^T|$
2. Пусть теорема верна для всех определителей порядка n. Докажем, что для определителей порядка n + 1 она также верна.

Рассмотрим матрицу A порядка n + 1 и вычислим определитель для |A| и $|A^T|$
Разложим определитель |A| по 1-ой строке:
$|A| = a_{11} * M_{11} - a_{12} * M_{12} + \cdots \pm a_{n,n+1}M_{1,n+1}$
Разложим определитель $|A^T|$ по 1-ому столбцу:
$|A^T| = a_{11} * M^T_{11} - a_{12} * M^T_{12} + \cdots \pm a_{1,n+1} * M^T_{1,n+1} = a_{11} * M_{11} - a_{12} * M_{12} \pm \cdots \pm a_{1,n+1} * M_{1,n+1} = |A|$ тк порядок M_{ij} равен и по определению $M^T_{ij} = M_{ij} \Rightarrow$ по ММИ теорема верна $\forall n \in \mathbb{N}$ чтд

5 Обратная матрица. Формула Крамера

Определение: Обратной матрицей к квадратной матрице A наывается матрица A^{-1}, удовлетворяющая условию: $A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$

Теорема: Обратная матрица единственна

Доказательство: Предположим, что существуют две различные обратные матрицы для матрицы A: B и C
A*B = B*A = E
A*C = C*A = E
$\Rightarrow$ B = B*E = B*(A*C) = (B*A)*C = EC = C $\Rightarrow$ B = C

Определение: Матрица, имеющую обратную, называется обратимой или невырожденной. В противном случае матрица называется вырожденной

Теорема(критерий обратимости): Матрица A обратима $\Leftrightarrow$ |A| $\neq 0$

Необходимость: Если А-обратима, то |А| $\neq 0$

Достаточность: Если |А| $\neq 0 \rightarrow$ А-обратима

Доказательство:
1) Необходимость
Пусть А - обратима $\Rightarrow \exists A^{-1} : \quad A * A^{-1} = E$
$|A * A^{-1}| = |A| * |A^{-1}| = |E| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$

$$|A^{-1} = \frac{1}{|A|}$$

2) Достаточность
Пусть |А| $\neq 0$. Покажем, что $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * \widetilde{A}$, где

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- присоединненая матрица к матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots \\ \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица $\widetilde{A}$ состоит из алгебраических дополнеия для элементов А. По т о разложении определителя по строке(столбцу) и по т. о фальшивом разложении определителя имеем:

$$A * \widetilde{A} = \widetilde{A} * A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| * E$$

$\Rightarrow A * \frac{1}{|A|} * \widetilde{A} = \frac{1}{|A|} * \widetilde{A} * A = E$

Значит обратная матрица существует, т.е матрица А обратима и $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * \widetilde{A}$ - формула для нахождении обратной матрицы

6 Свойства обратной матрицы

1. $E^{-1} = E$
2. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$

4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$

Доказательство 4): Используя определение обратной матрицы:

$$(A^{-1})^T * A^T = (A * A^{-1})^T = E^T = E$$

Доказательство 5):
$(B^{-1}*A^{-1})*(A*B) = B^{-1}*(A^{-1}*(A*B)) = B^{-1}((A^{-1}*A)*B) = B^{-1}*(E*B) = B^{-1} * B = E$

7 Методы нахождения обратной матрицы

1. Метод присоединенной матрицы
2. Метод элементарных преобразований

Теорема: Произвольная невырожденная матрица с помощью элементарных преобразований строк приводится к единичной матрице.

Алгоритм:

1. К матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   Нужно справа приписать единичную матрицу

$$D = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

2. С помощью элементарных преобразований над строками матрицы D нужно привести матрицу A к единичной:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

8 Решение матричных уравнений

Рассмотрим уравнение: A*X = B

1) Умножение правую и левую части на матрицу A^{-1} : $A * X = B \Leftrightarrow A^{-1} * A * X = A^{-1} * B \Leftrightarrow EX = A^{-1} * B \Leftrightarrow X = A^{-1} * B$

2) $X * A = B \Leftrightarrow X * A * A^{-1} = B * A^{-1} \Leftrightarrow X = B * A^{-1}$

9 Формулы Крамера

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Матрица системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Матрица-столбец переменных

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Матица-столбец свободных членов

A*X = B система в матричном виде

Доказательство: Будем считать, что матрица A – невырожденная, то есть, ее определитель отличен от нуля. В этом случае система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

Метод Крамера основывается на двух свойствах определителя матрицы:

1. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения

2. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) квадратной матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю

Итак, приступим к нахождению неизвестной переменной x_1. Для этого умножим обе части первого уравнения системы на A_{11}, обе части второго уравнения – на A_{21}, и так далее, обе части n-ого уравнения - на A_{n1} (то есть, уравнения системы умножаем на соответствующие алгебраические дополнения первого столбца матрицы A):

$$
\begin{cases}
A_{11}a_{11}x_1 + A_{11}a_{12}x_2 + .. + A_{11}a_{1n}x_n = A_{11}b_1 \\
A_{21}a_{21}x_1 + A_{21}a_{22}x_2 + .. + A_{21}a_{2n}x_n = A_{21}b_2 \\
... \\
A_{n1}a_{n1}x_1 + A_{n1}a_{n2}x_2 + .. + A_{n1}a_{nn}x_n = A_{n1}b_n
\end{cases}
$$

Сложим все левые части уравнения системы, сгруппировав слагаемые при неизвестных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и приравняем эту сумму к сумме всех правых частей уравнекний:

$x_1(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{22} + ... + A_{n1}a_{n1}) + x_2(A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + ... + A_{n1}a_{n2}) + ... + x_n(A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + ... + A_{n1}a_{nn}) = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n$

Если обратиться к озвученным ранее свойствам определителя, то равенство примет вид:

$$
x_1 * |A| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

Аналогично находим x_2. Для этого умножаем обе части уравнений системы на алгебраические дополнения второго столбца матрицы А.

Теорема: Система линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей имеет единственное решение.

Доказательство:

Тк |A| $\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow x = A^{-1} * B$. Тк обратная матрица A^{-1} единственна и B - заданная матрица, то решение единственно