МатАнал

Забродин Денис Александрович

20 ноября 2022 г.

Содержание

1 Понятие функции

$\forall x \in X \rightarrow$ единственный $y \in Y \qquad y = f(x)$

Определение: *Функцией* называется соответствие множества X из R множеству Y из R, такое, что каждому значению x множества X соответствует единственное значение y из множества Y

X - множество определения функции
$E = \{y \in Y : y = f(x), \forall x \in X\}$ - множество значений функции

2 Способы задания функции

1. Аналитический способ.
   - Явно заданные функции: $y = f(x)$; $y = x^2 + 5x + 2$
   - Неявно заданные функции: $F(x, y) = 0$; $x^2 + y^2 = 1$, где y ≥ 0
   - Параметрически заданные функции:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

2. Графический способ
3. Табличный способ

Суперпозиция $\Leftrightarrow$ сложная функция $\Leftrightarrow$ композиция функций

$y = f(x); z = g(y) \Rightarrow z = g(f(x))$

3 Предел функции

3.0.1 По Коши

Определение предела функции по Коши:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Определение предела функции в бесконечности:
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x > M \quad |f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x < -M \quad |f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M(\varepsilon) > 0 : \quad \forall |x| > M \quad |f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists \delta(M) : \quad \forall x : \quad 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) > M$

3.0.2 По Гейне

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \to a \Rightarrow \{f(x_n)\} \to A$

3.1 Односторонние пределы

Левосторонний предел: $x \to a \quad (x < a)$

$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Правосторонний предел: $x \to a \quad (x > a)$

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x : \quad a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$

3.2 Теоремы

Теорема об ограниченности функции, имеющей предел:
Если $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то функция f(x) - ограниченная в окрестности точки a.

Доказательство:
$\forall \varepsilon > 0 \ \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x, \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

Теорема о сохранении знака предела:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Rightarrow \exists U(a, \delta) : x \in U(a, \delta) \quad sgn(f(x)) = sgn(A)$

Теорема об единственности предела:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Rightarrow$ он единственный

Предельный переход в неравенствах:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = B, \quad \forall x \ \ f(x) \leq g(x) \Rightarrow A \leq B$

Теорема о пределе промежуточной функции:
$u(x) \leq f(x) \leq v(x) \ \ \forall x \in U(a)$
$\exists \lim\limits_{x \to a} u(x) = \exists \lim\limits_{x \to a} v(x) = A \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Теорема о предельном переходе в арифметических операциях:
$\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = A, \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = B \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x)) = A + B$
$\lim\limits_{x \to a} f_1(x) * f_2(x) = A * B$
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A}{B}$

4 Сравнение бесконечно малых функций

Пусть α(x) и β(x) - две б.м функции при x $\to$ a, т.е $\exists \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и $\exists \lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$. Сравним эти функции, рассмотрев $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$

5 Некоторые полезные пределы и методы их доказательства

1. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, \quad |q| < 1, \quad r = \frac{1}{|q|}, \quad r > 1, \quad r = 1 + \alpha, \quad \alpha > 0$

   $\frac{1}{|q|^n} = r^n = (1+\alpha)^n > \alpha n$ (неравенство Бернулли)

   $\frac{1}{|q|^n} > \alpha n$

   $\frac{1}{\alpha n} > |q|^n$

   $0 < |q|^n < \frac{1}{\alpha n} \to 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

   $n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \dots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$

   $\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 < n \quad \Rightarrow \quad (\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \frac{2}{n-1} \quad \Rightarrow$

   Выберем $\forall \varepsilon > 0$

   $|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$ при всех n $> 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

   а) a $= 1 \Rightarrow$ очевидно
   б) a $> 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1$

   $a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + (\sqrt[n]{a} - 1))^n > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) > n(\sqrt[n]{a} - 1) \quad \Rightarrow$

   $\forall \varepsilon > 0, \quad 0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{a}{\varepsilon}$

   в) $0 <$ a $< 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$

6 Бесконечно малые функции

$x \to a(a+, a-, +\infty, -\infty, \infty)$

(α(x) - б.м при x $\to$ a)
$\Leftrightarrow$
$\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta(\varepsilon)>0: \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon$

Пример:
При x $\to$ 0 функция sin(x), x^3, 1 - cos(x) являются бесконечно малыми.
При x $\to$ 2 функции sin(x-2), $(x-2)^3$, 1 - cos(x-2) являются бесконечно малыми.

7 Лемма о связи функции и ее предела

$$(\exists \lim_{x\to a} f(x)=A) \Leftrightarrow (f(x)-A=\alpha(x): \quad \lim_{x\to a}\alpha(x)=0)$$

Доказательство:
1) **Необходимость**
$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta(\varepsilon)>0: \ \forall x, \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$

Обозначим $f(x)-A=\alpha(x)$, тогда $\forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta(\varepsilon)>0: \forall x, \ \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0 \Rightarrow \alpha(x)$ - б.м при x $\to$ a

2)**Достаточность**
Пусть $\alpha(x)=f(x)-A$ - б.м при x $\to$ a.
Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}(f(x)-A)=0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta(\varepsilon)>0: \quad \forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |(f(x)-A)-0|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$

Лемма 1. Сумма конечного числа бесконечно мылых есть величина бесконечно малая.

Доказательство:
Пусть α(x), β(x) - б.м при x $\to$ a. Докажем, что α(x) + β(x) - б.м при x $\to$ a

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta_1(\varepsilon): \forall x: |x-a|<\delta_1 \quad |\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists\delta_2(\varepsilon): \forall x: |x-a|<\delta_2 \quad |\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

Возьмем $\delta=min\delta_1,\delta_2$. Тогда $\forall x: |x-a|<\delta \quad |\alpha(x)+\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, чтд

Лемма 2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную является величиной бесконечно малой.

Пусть существует $M>0: \forall x \quad |\beta(x)|<M, \alpha(x)\to 0$ при x $\to$ a. Тогда α(x)β(x) - бесконечно малая при x $\to$ a.

Доказательство:
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : \quad |x-a| < \delta \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$; тогда
$\forall x : |x-a| < \delta \quad |\alpha(x)\beta(x)| \leq |\alpha(x)| * |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$ чтд

Лемма 3. Произведение двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

8 Эквивалентные бесконечно малые

Определение: Бесконечно малые функции α(x) и β(x) называются эквивалентными при x → a, если lim $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$

Обозначение: α(x) ~ β(x). Пример: $sin(x^3) \sim x^3$ при x → 0

Соотношение эквивалентности обладает свойствами *рефлексивности*, *симметричности* и *транзитивности*:
$\alpha \sim \beta, \quad \alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha, \quad \alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

Смысл эквивалентности состоит в том, что бесконечно малые стремятся к нулю "с одинаковой скоростью".

Теорема о замене бесконечно малой функции на эквивалентную

Предел отношения двух б.м. не изменится, если заменить эти б.м. на им эквивалентные

Пусть $x \to a \quad \alpha(x) \to 0, \quad \beta(x) \to 0, \quad \alpha(x) \sim \alpha_1(x), \quad \beta(x) \sim \beta_1(x)$

Тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$

Доказательство: $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)}{\alpha_1(x)\beta_1(x)\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$

9 Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

9.1 Следствия

Следствие 1: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$

Следствие 2: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arcsinx}{x} = 1$

Следствие 3: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$

Следствие 4: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$

10 Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty}(1+\frac{1}{x})^x = e; \quad \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$x \to +\infty; \quad \forall n : n \leq x \leq n+1$

$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n+1} + 1 \leq \frac{1}{x} + 1 \leq \frac{1}{n} + 1$

$(\frac{1}{n+1} + 1)^n \leq (\frac{1}{x} + 1)^x \leq (\frac{1}{n} + 1)^{n+1}$

$(\frac{1}{n+1} + 1)^{n+1}(\frac{1}{n+1} + 1)^{-1} \leq (\frac{1}{x} + 1)^x \leq (\frac{1}{n} + 1)^n(\frac{1}{n} + 1)$

Следствие $x \to 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \to \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Следствие 1: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$
Доказательство: $\lim\limits_{x \to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = lne = 1$

Следствие 2: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
Доказательство: Замена $t = e^x - 1 \to x = ln(1+t) \to \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{ln(1+t) = 1}$

Следствие 3: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = lna$
Доказательство: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{xlna} - 1}{xlna} lna = lna$

Следствие 4: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$
Доказательство: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\alpha ln(1+x)} - 1}{\alpha ln(1+x)} \cdot \frac{ln(1+x)}{x} \alpha = \alpha$

11 Таблица эквивалентных бмф в точке x = 0

- sinx $\sim$ x
- tgx $\sim$ x
- arcsinx $\sim$ x
- arctgx $\sim$ x
- ln(1+x) $\sim$ x

- 1 - cosx $\sim \frac{x^2}{2}$
- $a^x - 1 \sim$ xlna
- $\log_a x \sim \frac{x}{lna}$
- $e^x - 1 \sim$ x
- $(1+x)^m - 1 \sim$ mx

12 Бесконечные пределы y $\to \infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists \delta(M) > 0: \quad \forall x: \quad 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow |f(x)| > M$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists \delta(M) > 0: \quad \forall x: \quad 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow f(x) > M$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists \delta(M) > 0: \quad \forall x: \quad 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow f(x) < -M$

13 Бесконечно большие функции

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$

13.1 Теорема о связи бб и бм функций

$F(x)$ - бб при x $\to$ a, то α(x) $= \frac{1}{F(x)}$ - бм при x $\to$ a

Доказательство:
Пусть α(x) - бм при x $\to$ a. Следовательно,

$\exists \lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{\alpha(x)}| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

(обозначим $\frac{1}{\varepsilon}$ = M)

$\forall M > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |F(x)| > M \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} F(x) = \infty \Rightarrow F(x)$ - бб

14 Свойства бм, бб и ограниченных функций

- Произведение бм функции на ограниченную есть бм
- Произведение б.б. функции на ограниченную есть б.б.
- Сумма ограниченного числа б.б. функций одного знака есть б.б.;

- Произведение б.б. на б.б. есть б.б.;
- Произведение б.м. на б.м. есть б.м.

15 Сравнение бесконечно малых функций

Пусть α(x) и β(x) - две бм функции при x $\to$ a, те $\exists \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0 \quad \exists \lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0 \qquad (1)$

Сравним эти функции, рассмотрев $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$

1^0. Если предел (1) равен нулю, то α(x) является бм функцией более высокого пордка, чем β(x)

2^0. Если предел (1) равен бесконечности, то β(x) является бм функцией более высокого порядка, чем α(x)

3^0. Если предел (1) равен постоянной, отличной от 0 и 1, то функции α(x) и β(x) являются бм одного порядка при x $\to$ a.

4^0 Если предел (1) равен 1, то α(x) и β(x) являются эквивалентными б.м. функциями при x $\to$ a, что символически записывают:

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \quad x \to a$$

5^0 Если $\exists$ положительное число m, такое что $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^m} = k \neq 0, \infty$, то α(x) есть бм функция порядка m по сравнению с β(x) при x $\to$ a.

6^0 Если предел (1) не существует, то б.м. функции не сравниваются

16 Сравнение бб функций

Пусть u(x) и v(x) - две бб функции при x $\to$ a, те $\exists \lim\limits_{x\to a} u(x) = \infty; \quad \lim\limits_{x\to a} = \infty \qquad (2)$

Сравним эти функции:

1^0 Если предел (2) равен бесконечности, то u(x) при x $\to$ имеет более высокий порядок роста, чем v(x).

2^0 Если предел (2) равен нулю, то более высокий порядок роста имеет функция v(x)

3^0 Если предел (2) равен постоянной, отличной от 0 и 1, то u(x) и v(x) одного прядка роста при x $\to$ a.

4^0 Если предел (2) равен 1, то u(x) и v(x) - эквиваленты

17 Символы: $\bar{o}$ и $\underline{O}$

1^0 Пусть α(x) и β(x) - бм при x $\to$ a. Если α(x) - бм более высокого порядка, то есть

$\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то это можно записать как α(x) = $\bar{o}(\beta(x))$.

Или: функция g называется бесконечно малой по сравнению с функцией f при x $\to$ a (записывается g = o(f) при x $\to$ a), если g(x) = ε(x)f(x), x $\in U^o(a)$, причем $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$

Свойства этого символа:

1. $\bar{o}(\beta(x)) \pm \bar{o}(\beta(x)) = \bar{o}(\beta(x))$
2. $\gamma(x) = \bar{o}(\beta(x)) \Rightarrow \bar{o}(\beta(x)) + \bar{o}(\gamma(x)) = \bar{o}(\beta(x))$
3. $\alpha(x), \beta(x)$ - бм при x $\to$ a $\Rightarrow \alpha(x)\cdot\beta(x) = \bar{o}(\alpha(x))$ и $\alpha(x)\cdot\beta(x) = \bar{o}(\beta(x))$

2^0 Пусть f(x) и g(x) определены U(a) Если $\forall x \in U(a)$ отношение этих функций есть функция ограниченная, те $\exists M > 0$, что $|\frac{f(x)}{g(x)}| < M$, то это записывают:

$f(x) = \underline{O}(g(x))$ Очевидно, что из записи $\alpha(x) = \bar{o}(\beta(x)) \Rightarrow \alpha(x) = \underline{O}(\beta(x))$, однако обратное неверно

18 Непрерывность функции и точки разрыва

18.1 Определение функции, непрерывной в точке

Пусть f(x), определена в некоторой окрестности U(x_0, δ) и в самой точке x_0

Определение 1:

Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если:

1. Она определена в точке x_0, и существует f(x_0)
2. Существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Определение 2:

Функция f(x), определенная в U(x_0, δ), называется непрерывной в точке x_0, если $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta(\varepsilon): \quad \forall x, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Из определния непрерывной функции в точке следует утвержедение:

Предел непрерывной функции равен функции от предела, тк $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$

т.е знак предела и знак функции можно менять местами в случае, когда функция непрерывна.

Пусть точка x_0 принадлежит ОДЗ фукции вместе с некторой окрестностью, те U(x_0, δ) $\in$ ОДЗ. Придадим x_0 приращение любого знака (Δx). Тогда функция, принимающая в точке x_0 занчение f(x_0), тоже получит некоторое приращение:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

По определению 1, функция непрерывна в точке x_0, если:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

Так, мы пришли к 3 определению функции, непрерывной в точке, с помощью приращения:

Определение 3:

Функция f(x) непрерывна в точке x_0, если она определена в этой точке и в ее окрестности, и предел приращения функции равен нулю, когда приращение аргумета стермится к нулю, те бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое приращение непрывной функции: Δx - бм $\Rightarrow$ Δy - бм

18.2 Свойства непрерывных функций

Теорема 1

Элементарные функции непрерывны в любой точке своей области определения

Доказательство:

Фиксируем произвольную точку x_0, придадим ему приращение Δx, тогда:

$\Delta y = sin(x_0 \Delta x) - sin x_0 = 2 sin \frac{\Delta x}{2} cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})$

Тогда: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2 \lim\limits_{\Delta x \to 0} sin \frac{\Delta x}{2} cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) = 0$, те в силу определения 3, y = sinx нерперывна в x_0. В силу произвольного выбора x_0, y = sinx непрерывна на всей числовой оси.

Теорема 2

Сумма, разность, произведение, отношение двух непрерывных функций есть функция непрерывная

Доказательство:

Вытекает из соответствующих теорем о пределах. Так, например, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непреывны в точке x_0, то функция g(x) $= f_1(x) \cdot f_2(x)$ будет непрерывна в x_0, тк

$$\lim_{x \to x_0} = \lim_{x \to x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) = g(x_0)$$

Теорема 3 (принцип суперпозиции функций)

Если функция $\phi = \phi(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\phi(x_0) = \phi_0$, а функция F(ϕ) непрерывна в ϕ_0, то f(x) = F(ϕ(x)) непрерывна в точке x_0, те непрерывная функция от непрерывной функции есть функция непрерывная.

Доказательство:

Рассмотрим $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} F(\phi(x))$

Так как знаки непрерывной функции и ее предела можно поменять местами, то получим:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} F(\phi(x)) = F(\lim_{x \to x_0} \phi(x)) = F(\phi_0) = f(x_0)$$

Определение: Функция f(x) называется непрерывной на интеревале (a, b), если она непрерывна в любой точке этого интервала.

Определение: Функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a;b], если она непрерывна во всех внутренних точках этого отрезка, а на границах отрезка выполняется условие: $\exists \lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$

Теорема (об обращении непрерывной на отрезке функции в нуль)

Если функция y = f(x) непрерывна на [a;b] и на концах отрезка принимает знчения разных знаков (f(a) $\cdot$ f(b) < 0), то найдется хотя бы одна точка c $\in$ [a;b] такая, что f(c) = 0, те непрерывная функция не может сменить знак, не пройдя через нуль

Теорема (о промежуточном занчении непрерывной на отрезке функции)

Если функция y = f(x) непрерывна на [a;b] и область изменения функции есть некоторый отрезок [A;B] оси Oy, то для любого C $\in$ [A;B] существует хотя бы одно c $\in$ [a;b] такое, что f(c) = C, те непрерывная функция должна пройти через все свои значения, заполнив сплошь промежуток своего изменения [A;B]

Теорема об ограниченности функции непрерывной на отрезке

Если функция y = f(x) непрерывна на [a,b], то она ограничена на этом отрезке, те $\exists M > 0 : \forall x \in [a; b] \Rightarrow |f(x)| < M$

Доказательство:

$\forall x_0 \in [a; b] \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Из определения 2 имеем:

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

$M = max f(x_0) + \varepsilon; f(x_0) - \varepsilon \Rightarrow -M < f(x) < M \Leftrightarrow |f(x)| < M$

Теорема (о наибольшем и наименьшем значениях непрерывной на отрезке функции)

Если функция y = f(x) непрерывна на [a;b], то хотя бы в одной точке она достигает своего наибольшего и хотя бы в одной точке - своего наименьшего значения

Обозначения: m = $min_{[a;b]} f(x); M = max_{[a;b]} f(x)$

Если функция y = f(x) определена в окрестности точки x_0, но устовия непрерывности в точке x_0 нарушены, то в этой точке функция имеет разрыв

Определение: Точка a называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные пределы: $A = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$

1) если $\exists \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = A \neq \infty$ и $\exists \lim\limits_{x \to x_0 -} = B \neq \infty$, то в точке x_0 функция делает скачок

2) Устранимые точки разрыва

$\exists \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$, но в самой точке разрыва функция либо не определена, либо, если и определена, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) \neq f(x_0)$. Такая функция имеет устранимею точку разрыва; скачок функции равен нулю

Для восстановления непрерывности достаточно либо доопределить функцию в точке x_0, если она не была определена, либо изменить значение функции в этой точке.

Если хотя бы один из односторонних пределов не существет или равен бесконечности, то в этой точке у функци и разрыв II - го рода.