Основы Научной Деятельности

Цветков Евгений Алексеевич

13 ноября 2022 г.

Содержание

1 Сведения из матемматической логики

1.1 Логика высказываний

Будем считать, что высказывание - некоторое предложение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно.

1.1.1 Примеры высказываний

Пример:

1) Ноль меньше одного. Любой куб имеет 6 граней. Сумма углов треугольника больше 180 градусов. Земла плоская. Высказывания причем 1,2 - истинные, остальные ложные.

2) "Целое число называется четным, если оно делится на 2" - не высказывание, но "Если число делится на 2, то оно четное" - высказывание.

3) "В том году был хороший урожай", "Целое число n делится на целое число k без остатка" - не являются высказываниями, так как есть неопределенные параметры "том", "n", "k".

Высказывания обозначаются латинскими прописными буквами, а истинность или ложность соответственно a≡И; b≡Л.

Наряду с постоянными высказываниями каждое из которых имеет изветное значение, будем рассматрирвать также переменные высказывания, значением которых, являются конкретные постоянные высказывания.

1.2 Логические операции

1.2.1 Отрицание

Определение: Отрицание(Логическое "не", инверсия) высказывание a называется высказываним $\overline{a}$ тогда и только тогда, когда a - ложно.

1.2.2 Дизъюнкция

Определение: Дизъюнкцией (логическое "или") высказывание a и b называется высказывание $a \vee b$ истнинное тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний a или b - истинно. Иногда называют логическим сложением.

1.2.3 Конъюнкция

Определение: Конъюнкцией (логическое "и", логическое умножение) высказывание a и b называется высказывание $a \wedge b$, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания a и b - истинны.

1.2.4 Импликация

Определение: Импликацией (логическое "Если.., то..") с посылкой a и заключением b называется высказывание a $\to$ b, ложное тогда и только тогда, когда a - истинное, b - ложное.

1.2.5 Эквиваленция

Определение: Эквивалинцией (логическое "тогда и только тогда, когда") высказыванием a и b называется высказывание a $\leftrightarrow$b, истинное тогда и только тогда, когда высказывание a и b имеют одно значение.

Высказывание называется элементарным, если оно не содержит логических операций, в противном случае составным.

1.2.6 Примеры истинных и ложный высказываний

Примеры:

1) Отрицание к ложному высказыванию "5 - четное число" является истинное высказывание " 5 - нечетное число".

2) Если $2^3 = 8$, то квадрат любого числа есть число неотрицательное - истинное высказывание.

3) Если 2 * 2 = 5, то $3^2 = 9$ - истинное высказывание.

1.2.7 Определение формулы высказываний

Определение: Формулой логики высказываний называется любое переменное или постоянное высказывание, а также, если a и b - фломулы, то ($\overline{A}$), ($\overline{B}$), (A)$\wedge$(B), (A)$\vee$(B)... - тоже высказывания

1.3 Приоритет выполнения логических операций

1) Вычисления в скобках("(...)")

2) Отрицание ("не")

3) Конъюнкция ("и")

4) Дизъюнкция ("или")

5) Импликация ("$\to$")

6) Эквиваленция ("$\leftrightarrow$")

1.3.1 Определение тождественно истинной/ложной формулы

Определение: Формула логики высказываний называется тождественно истинной (или законом логики), если на любом наборе значений, входящих в нее переменных, она принимает истинное значение, и тождественно ложное, в противном случае.

1.3.2 Определение равносильной/эквивалентрой формулы

Определение: Две формулы от одних и техже переменных называют равносильными/эквивалентными, если они принимают одинаковое значение на любых наборах значений переменных.

1.4 Логика предикатов

В логике высказываний внутренняя структура высказываний не исследуется. Едиснственным свойством элементарного высказывания является их истинное значение, никакого другого конкретного содержания они не имеют $\Rightarrow$ все истинные и ложные высказывания можно считать эквивалентными друг другу.

1.4.1 Определение логического суждения

Определение: Необходимость изучения внутренней структуры элементарных высказываний привела к возникновению понятия логического суждения, определяют его, как форма мысли, в которой утверждается или отрицается что-либо относительно предметов и явлений, их свойств, связей и отношений и которое обладает свойством выражать либо истинну либо ложь. $\forall$ логическеских высказываний, суждение имеет вид: "S не(есть) P" (или "S не(является) P).

S - субъект суждения, отражает предмет мысли, P - Предикат обсуждения, то о чем высказывание/утверждение/отрицание касательно субъекта.

1.4.2 Примеры логических суждений

Пример:

Алексей Михайлович есть Царь, где S - Алексей Михайлович, P- Царь.

Ученик 9-го класса Иван Петров не закончил проходить диспансеризацию, где S - ученик 9-го класса Иван Петров, P - не закончил проходить диспансеризацию.

Предикат в произвольном логическом суждении можно представить в виде: "... (не) есть P" (или "... (не) является P"). Пропуск играет роль переменной определенной для предметной области.

При подстановке подходящего субъекта получится истинное или ложное логическое суждение.

Таким образом в математической логике определяется понятие предикатов - как предложение с переменными изменяющимися в некоторой области, которая дает высказывание в результате замены переменных их допустимыми значениями.

Изучим различные высказывания расчлененных на субъект и предикат, их взаимоотношениями занимается логика предикатов(исчисление предикатов).

Этот раздел математической логики опирается на логические высказывания и включает их в свой состав.

1.4.3 Определение n местных/парных предикатов

Определение: Предикат называется n местным/или n - парным, если в него входит n различных переменных. Всякое высказывание есть 0 местный предикат.

1.4.4 Примеры n местных/парных предикатов

Пример:

"число x является простым" - одноместный предикат.

"число x делится на число y" - двухместный предикат.

"x = $y^2 + z^2$" - трехместный предикат

Все предикаты будем обозначать большими латинскими буквами с указанием в скобках входных элементов.

1.4.5 Определение тождественно истинного/ложного предиката

Определение: Предикат P(x_1, x_2, ..., x_n) называется тождественно истинным, если он обращается в истинное высказывание на всех допустимых наборах значений переменных x_1, x_2, ..., x_n, и тождественно ложным - если ложным.

1.4.6 Определение выполнимого предиката

Определение: Предикат P(x_1, x_2, ..., x_n) называется выполнимым, если существует хотя бы 1 набор допустимых значений, входящих в него переменных, на котором он обращается в истинное высказывание.

1.4.7 Примеры предикатов

Пример:

"число x делится на 1" - тождественно истинное

"число x делится на 2" - выполнимое

"Уровнение $x^3 + y^3 = z^3$ разделимо в целах числах x" - тождественно ложное

Все известные логические операции также применимы и к предикатам.

Притом заметим, число переменных в результирующем предикате может оказаться, если какие-то переменные из 1-го предиката входят во 2-ой.

1.4.8 Примеры n-местных предикатов

Пример:

x - студент РТУ МИРЭА

y - препадователь РТУ МИРЭА

P(x) - студент x не пришел на зачет по геометрии

Q(x) - студент x получил высшую оценку

R(x, y) - Студент x сдавал зачет препадователю y

$\overline{P(x)}$ ∧ R(x, y) → Q(x) = S(x, y) - " Если студент x пришел на зачет по геометрии и сдал его препадователю y, то он получил высшую оценку".

Рассмотрим одноместный предикат P(x). Говорят, что высказывания ∀x: P(x) и ∃x: P(x) получены из P(x) путем навешивания квантора всеобщности и квантора существования переменной x.

Первое высказывание будет истинным тогда и только тогда, когда P(x) - тождественно истинный предикат.

1.4.9 Пример одноместных предикатов

Пример:

P(x) - "x - простое число"

∀x: P(x) - "все числа простые" - ложное

1.4.10 Пример одноместных предикатов с квантором

Пример:

P(x) - " в четырехугольник x можно вписать окружность"

∃x: P(x) - "существуют четырехугольники, в которые можно вписать окружность" - истинна

Кванторы можно отрицать

$\overline{\forall}$x: P(x) ⇔ ∃x: $\overline{P(x)}$

$\overline{\exists}$x: P(x) ⇔ ∀x: $\overline{P(x)}$

1.4.11 Пример отрицания квантора

Пример:

$\overline{\exists}$x: x^2 + 2x + 3 = 0 ⇔ ∀x: $\overline{x^2+2x+3=0}$

Пусть P(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1} ..., x_n) - n местный предикат.

Сделав замену переменных x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1} ..., x_n допустимыми значениями a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1} ..., a_n. Получим одноместный предикат P(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1} ..., a_n).

Построим высказывание:

1)∀x_i: P(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1} ..., a_n)

2)∃x_i: P(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1} ..., a_n)

1) и 2) являются высказываниями или 0 местными предикатами.

Таким образом, при навешивании на P(x_1, x_2, ..., x_n) какого либо квантора общности по некоторой переменной, получим (n - 1) местный предикат.

1.4.12 Пример высказывания с квантором

Пример:

P(x) - "x - простое число"

Q(x, y) - "y больше x"

R(x, y) - "y равно x"

2 - наименьшее простое число

P(2) ∧ ∀x: P(x) → Q(2, x) ∨ R(2, x)

К одному и тому же предикату можноприменить несколько кванторов, их можно переставлять местами, однако, если к предикату применить последовательно разные кванторы, их порядок следования существенен.